

Matematika A3 szigorlat – 2016. június 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n . gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Írja le logikai jelek segítségével, hogy mit jelent az, hogy egy számsorozat divergens. Adjon példát korlátos divergens számsorozatra.
3. Mondja ki az összetett függvény differenciálására vonatkozó tételt.
4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.
6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható
7. Adjon példát olyan vektormezőre, amelynek a teljes értelmezési tartományán 0 a divergenciája, de nem áll elő egy vektormező rotációjaként.
8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.
9. Írja fel az n -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.
10. Ismertesse a Laplace-transzformáció alkalmazását differenciálegyenletek megoldására.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$ függvény teljes függvényvizsgálatát. ($\arcsin \frac{1}{4} = 0,25268\dots$)
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

3. Oldja meg az $A \cdot X = B$ egyenletet, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény feltételes szélsőértékeit a $4x^2 - 4xy + 4y^2 -$ feltétel mellett.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2y + 2z)\mathbf{i} + (-x - 6y + 4z)\mathbf{j} + (x - y - 4z)\mathbf{k}$ vektormezőt az $(1, 3, -9)$ középpontú, 3 egység sugarú gömb felületén befelé mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg a $(\cos x - y \sin x) + (2 + 2y + \cos x)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -5$ kezdeti feltétel mellett.
7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $y'' + (x-2)y' - xy = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.