

Matematika A3 szigorlat – 2016. szeptember 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Ismertesse a Cauchy-sorozat definícióját.
2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mit nevezünk Leibniz-típusú sornak? Adjon példát feltételesen konvergens Leibniz-sorra.
5. Adja meg a mátrixok rangjának három ekvivalens jellemzését.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.
10. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \cos \left(\sqrt{n^2 + n \cdot \arctan n} - \sqrt{n^2 + 7} \right)$$

$$b_n = \left(\frac{n-2}{n-7} \right)^{2n-1}$$

2. Végezze el az $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre $f(x) = (x - \pi)^2$ teljesül, ha $0 \leq x \leq 2\pi$. Határozza meg f Fourier-sorát. Hova konvergál a sor az $x = \frac{\pi}{2}$ pontban? Adja meg a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ összeget.
4. Milyen c érték esetén létezik megoldása az

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- egyenletrendszernek? Oldja meg az egyenletrendszert, ha $c = 2$.
5. Egy tömör tórusz középköre az $x - y$ -síkban fekszik, középpontja az origó, sugara R , a keresztmetszet sugara $r < R$. Hol van az $x \geq 0$ félsíkba eső rész tömegközéppontja?
6. Oldja meg az $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 6y' + 9y = \sin 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.