Matematika A3 szigorlat – 2016. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mit értünk egy z komplex szám trigonometrikus alakján? Írja fel trigonometrikus alakban az $1 + \sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alapján $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a)$, $f(b)$ különböző előjelűek, akkor létezik $c \in [a, b]$, amire $f(c) = 0$.

3. Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható $[a, b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.

   Megoldás. Az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens, ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és divergens, ha $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

5. Definiálja egy lineáris transzformáció sajátértékének és -vektorának fogalmát.

   Megoldás. $\mathbf{v} \in V$ az $A : V \to V$ lineáris transzformáció sajátvektora λ sajátértékkel, ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ és $\mathbf{v} \neq 0$.

6. Mit jelent az, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontban folytonos?

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.

   Megoldás. Egy adott $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémához függvénysorozatot definiálunk a következő módon: $\varphi_0(x) = y_0$, $\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$. Ha f folytonos, a második változóban Lipschitz, akkor x_0 egy környezetében a sorozat egyenletesen konvergál az egyértelmű lokális megoldáshoz.

10. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Az olyan $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú egyenleteket, ahol $P = u'_x$ és $Q = u'_y$ valamely $u(x, y)$ kétváltozós függvényre. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \arctan\left(n \ln n - \ln n!\right) \qquad\qquad b_n = \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5}$$

Megoldás.

$$n \ln n - \ln n! = \ln \frac{n^n}{n!} \to \infty$$

miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

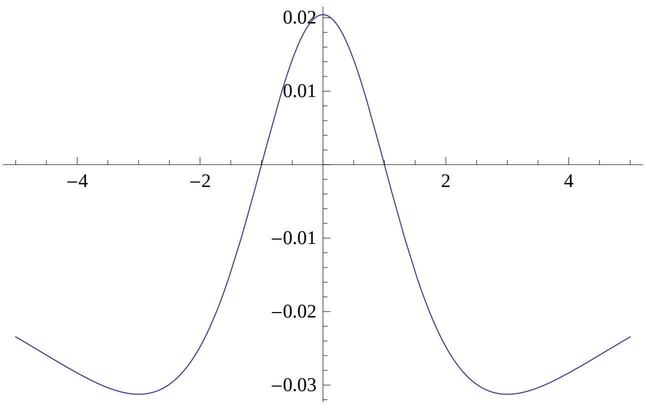
$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1-4n}{9-3n+2n^2}\right)^{\frac{9-3n+2n^2}{1-4n}}\right]^{(-3n+5)\frac{1-4n}{9-3n+2n^2}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1-4n}{9-3n+2n^2}\right)^{\frac{9-3n+2n^2}{1-4n}}\right]^{\frac{12-\frac{23}{n}+5\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+9\frac{1}{n^2}}} . \end{aligned}$$

Mivel $\frac{1-4n}{9-3n+2n^2} \to \infty$, a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke e. Másrészt a külső kitevő 6-hoz tart, így $\lim_{n\to\infty} b_n = e^6$.

2. Végezze el az $f(x) = (1-x^2)(7+x^2)^{-2}$ teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem periodikus, mindenhol folytonos függvény. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, mert racionális törtfüggvény és a nevező magasabb fokú mint a számláló. $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ miatt a zérushelyek ± 1.
$f'(x) = 2(x^3 - 9x)(7+x^2)^{-3}$ zérushelyei $0, \pm 3$, $f''(x) = -6(x^4 - 22x^2 + 21)(7+x^2)^{-4} = -6(x-1)(x+1)(x^2 - 21)(7+x^2)^{-4}$ zérushelyei $\pm 1, \pm\sqrt{21}$. Mivel f páros, az előjeleket elég pl. $x \geq 0$ mellett meghatározni:

	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\sqrt{21})$	$\sqrt{21}$	$(\sqrt{21},\infty)$
f	max	◝	infl	◟	min	◞	infl	◜
f'	0	-	-	-	0	+	+	+
f''	-	-	0	+	+	+	0	-



$$R_f = [f(3), f(0)] = \left[-\frac{1}{32}, \frac{1}{49}\right].$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. Ennek segítségével számítsa ki a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ sor összegét.

Megoldás. A függvény páros, tehát Fourier-sora tisztán cos tagokból áll.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{x=-\pi/2}^{x=-\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ (-1)^k & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Tehát a Fourier-sor

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x.$$

Mivel f szakaszonként folytonosan differenciálható, a Fourier-sor mindenhol f bal- és jobboldali határértékének számtani közepéhez konvergál. Speciálisan

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x,$$

amiből átrendezéssel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Számítsa ki az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A mátrixot jelölje A, ekkor a sajátértékek a $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda$ polinom gyökei. Ezek 0 és $1 \pm 2i$. A 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix} \overset{2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 50 & 10 & 14 \end{bmatrix} \overset{s_3+5s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -15 & -6 \end{bmatrix} \overset{s_3+3s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $(1, 2, -5)$ többszörösei.
Az $1+2i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig

$$\begin{bmatrix} -11-2i & -5 & -4 \\ 0 & 4-2i & 2 \\ 25 & 5 & 6-2i \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 6-2i \\ 0 & 4-2i & 2 \\ -11-2i & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{s_3+\frac{11+2i}{25}s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 6-2i \\ 0 & 4-2i & 2 \\ 0 & \frac{-14+2i}{5} & \frac{-6-2i}{5} \end{bmatrix} \overset{s_3+\frac{3+i}{5}s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 6-2i \\ 0 & 4-2i & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $(-4+3i, -10-5i, 25)$ többszörösei. Mivel A valós, a konjugált sajátértékhez tartozó sajátvektorok ezek konjugáltjai, vagyis $(-4-3i, -10+5i, 25)$ többszörösei.
(A Gauss-elimináció lépéseit egyébként most nem is kellett volna végigszámolni, hiszen mindkét esetben rögtön látszik, hogy az első két sor lineárisan független. Így a determináns eltűnése miatt a harmadik sor ezek lineáris kombinációja, vagyis elhagyható, a maradék pedig eleve lépcsős alakú.)

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x,y,z) = \dfrac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1+x^2}\mathbf{j} - \dfrac{1+2z^2}{\sqrt{1+z^2}}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező mindenhol értelmezett és folytonosan differenciálható,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z)_y &= \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z)_z &= \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0, \end{aligned}$$

tehát potenciálos. Egy potenciál

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\eta - \int_0^z \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \operatorname{arsh} x + \frac{y}{\sqrt{1+x}} - \int_0^z \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

Az utolsó integrált $\sinh t = \zeta$, $\cosh t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\zeta$ helyettesítéssel számolhatjuk:

$$\int_0^z \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{\operatorname{arsh} z} \frac{1+2\sinh^2 t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{arsh} z} \cosh 2t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sinh 2t\right]_0^{\operatorname{arsh} z} = z\sqrt{1+z^2},$$

tehát $f(x,y,z) = \operatorname{arsh} x + \frac{y}{\sqrt{1+x}} - z\sqrt{1+z^2}$.

6. Oldja meg az $(1+x^2)y' - xy = 1+x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2}$$

mindkét oldalát integráljuk:

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$. Az inhomogén egyenletet az állandók variálásával lehet megoldani, a megoldás $y(x) = c(x)\sqrt{1+x^2}$, ahol

$$1+x = (1+x^2)c'(x)\sqrt{1+x^2} + c(x)\left((1+x^2)(\sqrt{1+x^2})' - x\sqrt{1+x^2}\right) = (1+x^2)c'(x)\sqrt{1+x^2},$$

tehát $c'(x) = \frac{1+x}{(1+x^2)^{3/2}}$. $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int \frac{1+x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\sinh t}{(1+\sinh^2 t)^{3/2}}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\sinh t}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \tanh t - \frac{1}{\cosh t} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C,
\end{aligned}$$

tehát az általános megoldás

$$y(x) = x - 1 + C\sqrt{1+x^2}.$$

A kezdeti feltétel $1 = y(0) = -1 + C$, tehát $C = 2$.

7. Határozza meg az $y''' + 2y'' + y' = 2x + 4e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, tehát először a homogén egyenletet oldjuk meg a karakterisztikus polinom segítségével. Ez $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$, tehát a 0 egyszeres, a -1 kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális alakúak összege, az elsőnél külső rezonancia van, a másodiknál nincsen. Emiatt $y(x) = x(C_0 + C_1 x) + De^x$ alakban kereshetünk megoldást.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_0 + 2C_1 x + De^x \\
y''(x) &= 2C_1 + De^x \\
y'''(x) &= De^x
\end{aligned}$$

behelyettesítése után az egyenlet

$$(C_0 + 4C_1) + 2C_1 x + 4De^x = 2x + 4e^x,$$

ami minden x értékre akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
C_0 + 4C_1 &= 0 \\
2C_1 &= 2 \\
4D &= 4,
\end{aligned}$$

azaz $D = 1$, $C_1 = 1$, $C_0 = -4$. Az általános megoldás $y(x) = x(-4+x) + e^x + A + Be^{-x} + Cxe^{-x}$.