

Matematika A3 szigorlat – 2016. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mit értünk egy z komplex szám trigonometrikus alakján? Írja fel trigonometrikus alakban az $1 + \sqrt{3}i$ számot.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt.
4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.
5. Definiálja egy lineáris transzformáció sajátértékének és -vektorának fogalmát.
6. Mit jelent az, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontban folytonos?
7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradskij-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.
10. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \arctan(n \ln n - \ln n!) \qquad b_n = \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9} \right)^{-3n+5}$$

2. Végezze el az $f(x) = (1 - x^2)(7 + x^2)^{-2}$ teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. Ennek segítségével számítsa ki a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ sor összegét.

4. Számítsa ki az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1+x^2}\mathbf{j} - \frac{1+2z^2}{\sqrt{1+z^2}}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.
6. Oldja meg az $(1+x^2)y' - xy = 1+x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y''' + 2y'' + y' = 2x + 4e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.