Matematika A3 szigorlat – 2017. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani trigonometrikus alakban két komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke $-\infty$.

   Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) < K$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le a_n \le b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x\right)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n}{T} x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x\,\mathrm{d}x$$

6. Definiálja az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságát.

   Megoldás. $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel $f(x, y) = f(x_0, y_0) + A_x(x - x_0) + A_y(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \qquad\qquad b_n = \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + n^{-3/2}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

mivel $\frac{1}{n} \to 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 3n - \cos n) - (n^2 - 7n + \sin n)}{\sqrt{n^2 + 3n - \cos n} + \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{10n - \cos n - \sin n}{n\left(\sqrt{1 + 3n^{-1} - n^{-2}\cos n} + \sqrt{1 - 7n^{-1} + n^{-2}\sin n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{10 - \frac{\cos n + \sin n}{n}}{\sqrt{1 + 3n^{-1} - n^{-2}\cos n} + \sqrt{1 - 7n^{-1} + n^{-2}\sin n}} = 5.
\end{aligned}$$

2. Határozza meg az $f(x) = x\sin^3 x$ függvény egy primitív függvényét.

Megoldás. Használjuk először az $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$ azonosságot, majd integráljunk parciálisan, végül a $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\int x\sin^3 x \,\mathrm{d}x &= \int x\left(\sin x - \cos^2 x \sin x\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}) - \int \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}) + \sin x + \frac{1}{3}\int \left(\sin^2 x \cos x - \cos x\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}) + \sin x + \frac{\sin^3 x}{9} - \frac{\sin x}{3} + C.
\end{aligned}$$

(Ez C bármely értéke mellett primitív függvény.)

3. Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x^2}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás. Felhasználhatjuk, hogy

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

ezt a hatványsort tagonként integráljuk ($\arctan x = 0$ felhasználásával), elosztjuk x-szel, majd x helyére x^2-et helyettesítünk:

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2n+1}.$$

A mértani sor konvergenciasugara 1, az integrálás és x-szel osztás ezen nem változtat. Végül az x^2 helyettesítésénél gyököt kell vonni belőle, tehát továbbra is 1 marad a konvergenciasugár.

4. Oldja meg az $XA = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az egyenlet átrendezve $X = BA^{-1}$, tehát először érdemes A inverzét meghatározni például Gauss-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{s_3+2s_2 \\ s_4+s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3 \leftrightarrow s_4}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{s_4-2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+s_4 \\ s_3+s_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{2}\cdot s_1 \\ (-1)\cdot s_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az utolsó négy oszlopból álló részmátrix a keresett inverz. Tehát

$$X = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (-2y - x)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbfelület $z \geq 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás mellett.

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{2}\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos\vartheta\mathbf{k}$, a kifelé mutató normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}).$$

A $z \geq 1$ darabnak megfelelő paramétertartomány a $\sqrt{2}\cos\vartheta \geq 1$ feltétel alapján $[0,\pi/4] \times [0,2\pi]$.
A vektormezőt ki kell még értékelni a felületen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = \sqrt{2}(-\sin\vartheta\cos\varphi - 2\sin\vartheta\sin\varphi)\mathbf{i} + \sqrt{2}(2\sin\vartheta\cos\varphi - 3\sin\vartheta\sin\varphi)\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos\vartheta\mathbf{k}.$$

A kiszámítandó integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta\cos^2\varphi - 3\sin^3\vartheta\sin^2\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/4} \left(2\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/4} \left(6\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 4\sin\vartheta\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left[-2\cos^3\vartheta + 4\cos\vartheta\right]_0^{\pi/4} = (6 - 4\sqrt{2})\pi.
\end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (y^2 + yz)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (xy + yz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ zárt töröttvonalon, ha $A = (0,0,0)$, $B = (1,2,0)$, $C = (1,1,2)$, $D = (0,-1,2)$.

Megoldás. A megadott görbe zárt, tehát alkalmazható a Stokes-tétel. Az AB és DC szakaszok párhuzamosak, vagyis a töröttvonal egy parallelogramma pereme. Legyen ez a parallelogramma lap S, az irányítás jobbkéz-szabály szerinti. A lap egy lehetséges paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) + v(-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$, a paramétertartomány $[0,1]\times[0,1]$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i}+2\mathbf{j}) \times (-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

ennek iránya megegyezik a jobbkéz-szabály szerinti irányítással.
Szükség van még $\mathbf{u}$ rotációjára:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) = \left(\frac{\partial(xy+yz)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(y^2+yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy+yz)}{\partial x}\right)\mathbf{j}&\\ + \left(\frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2+yz)}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (x-z)\mathbf{i} - z\mathbf{k},&\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = \operatorname{rot}\mathbf{u}(u, 2u-v, 2v) = (u-2v)\mathbf{i} - 2v\mathbf{k}.$$

A keresett integrál ezek alapján

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A}\\ &= \int_0^1\int_0^1 \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^1\int_0^1 ((u-2v)\mathbf{i} - 2v\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^1\int_0^1 (4u-6v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -1.\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. A homogén egyenlet $y''+4y'+5y=0$, ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2+4\lambda+5=0$. A gyökök $\lambda_\pm = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = -2\pm i$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$. A jobb oldal exponenciális függvények lineáris kombinációja, a kitevőben x együtthatója $\pm i$, tehát nincsen külső rezonancia. Az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = C\cos x + D\sin x$ alakban kereshetjük:

$$\begin{aligned}y'(x) &= D\cos x - C\sin x\\ y''(x) &= -C\cos x - D\sin x\end{aligned}$$

behelyettesítése után az egyenlet

$$\begin{aligned}\cos x &= -C\cos x - D\sin x + 4(D\cos x - C\sin x) + 5(C\cos x + D\sin x)\\ &= (-C+4D+5C)\cos x + (-D-4C+5D)\sin x,\end{aligned}$$

ami akkor teljesül minden x-re, ha a

$$\begin{aligned}1 &= 4D + 4C\\ 0 &= -4C + 4D\end{aligned}$$

egyenletrendszer. Ebből $C = D = \frac{1}{8}$, tehát az általános megoldás

$$y(x) = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x.$$