

Matematika A3 szigorlat – 2017. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani trigonometrikus alakban két komplex szám szorzatát?
2. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke $-\infty$.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
6. Definiálja az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvényvel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.
10. Írja fel az n -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \quad b_n = \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}$$

2. Határozza meg az $f(x) = x \sin^3 x$ függvény egy primitív függvényét.
3. Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x^2}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

4. Oldja meg az $XA = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (-2y - x)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbfelület $z \geq 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás mellett.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y^2 + yz)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (xy + yz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ zárt töröttvonalon, ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (1, 1, 2)$, $D = (0, -1, 2)$.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.