Matematika A3 szigorlat – 2017. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki a Weierstrass-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, létezik minimuma és maximuma, azaz léteznek $c, d \in [a, b]$ számok, amire minden $x \in [a, b]$ esetén $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával, ellenkező esetben végtelen sok megoldás van.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

7. Ismertesse egy folytonos vektormező vonalmenti integráljának kiszámítási módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott görbe mentén.

   Megoldás. Ha $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonos, akkor a $\mathbf{v}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}$ görbe mentén $I = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát.

   Megoldás. Az egzakt differenciálegyenletek azok a $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú egyenletek, ahol $P = u'_x$ és $Q = u'_y$ valamely $u(x, y)$ kétváltozós függvényre. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

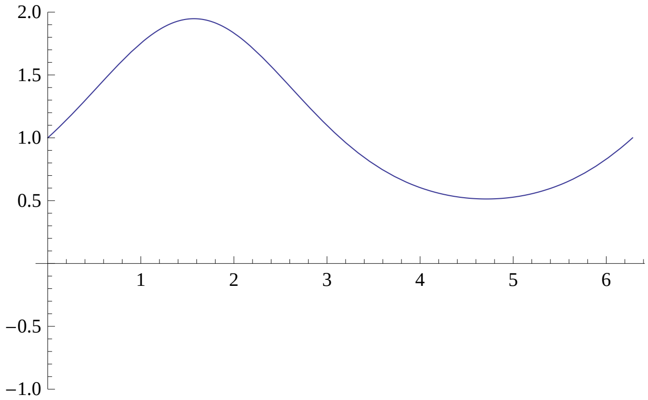
1. Végezze el az $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, a függvény nem páros, nem páratlan, 2π szerint periodikus (és nem konstans, tehát $\pm\infty$-ben nincs sem határértéke, sem aszimptotája), nincs zérushelye. $f'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\sin x}\cos x$ a $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pontokban 0, előjele megegyezik $\cos x$ előjelével.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}\sin x}\cos^2 x - \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\sin x}\sin x \\ &= \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}\sin x}\left(-\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + 1\right) \\ &= -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}\sin x}(\sin x + 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

   Ez akkor 0, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, tehát ha $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$
f	min		infl		max		infl	
f'	0	+	+	+	0	-	-	-
f''	+	+	0	-	-	-	0	+



   $R_f = [f(-\pi/2), f(\pi/2)] = \left[e^{-2/3}, e^{2/3}\right]$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. A primitív függvényt parciális integrálással, majd $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{\sin^2 t}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{1-\cos 2t}{4}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin 2t}{8} + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

   A határozott integrált ennek felhasználásával a Newton-Leibniz-tétellel számíthatjuk:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + 0\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + 0\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \frac{1}{1+\sqrt{n}}}{n + \ln n} x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. A konvergenciasugár meghatározható például a gyökkritérium alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + \frac{1}{1+\sqrt{n}}}{n+\ln n}} = \lim_{n\to\infty} 2 \sqrt[n]{\frac{1 + 2^{-n}\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{n+\ln n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{1 + 2^{-n}\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{1+\frac{\ln n}{n}}} = 2,$$

mivel $\sqrt[n]{n} \to 1$ és a második gyökön belüli hányados 1-hez tart. Ezek szerint $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ része a konvergencia-tartománynak, és ezen kívül legfeljebb az intervallum végpontjai lehetnek benne.
Az $x = -\frac{1}{2}$ pontban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \frac{2^{-n}}{1+\sqrt{n}}}{n + \ln n},$$

ami Leibniz típusú, hiszen váltakozó előjelű, és a tagok abszolútértéke monoton csökken (a számláló monoton csökken, a nevező monoton nő), tehát konvergens.
Az $x = \frac{1}{2}$ pontban a minoráns (vagy összehasonlító) kritériumot használhatjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{2^{-n}}{1+\sqrt{n}}}{n + \ln n} \geq \frac{1}{2n} = \infty$$

divergens, így a konvergenciatartomány $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 3y + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. Mivel f differenciálható, a szélsőértékek a kritikus pontok közül kerülnek ki. Az

$$0 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + 4x = 2x(y+2)$$
$$0 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 3 + 2y$$

egyenletrendszer megoldásai $(x, y) = (0, \frac{3}{2})$ és $(x, y) = (\pm\sqrt{7}, -2)$. A Hesse-mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4y - 4x^2,$$

ami a $(0, \frac{3}{2})$ pontban 14 (pozitív), tehát itt van lokális szélsőérték, míg a $(\pm\sqrt{7}, -2)$ pontban -28 (negatív), tehát itt nincsen lokális szélsőérték. A $(0, \frac{3}{2})$ pontban a főátló elemei pozitívak, tehát a mátrix pozitív definit, vagyis itt lokális minimum van.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y^2z\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ vektormezőt a $4x^2 + y^2 = 4$, $2x + z = 7$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. Az első egyenletben nem szerepel z, síkban tekintve ellipszist határoz meg:

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

tehát a görbe $z = 0$ síkra eső vetületét $\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ módon paraméterezhetjük. A második egyenletből $z = 7 - 2x$ kifejezhető, tehát a megadott görbe paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + (7 - 2\cos t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$ (a megadott körüljárás szerint). A derivált $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 2\sin t\mathbf{k}$.
A vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = -4\sin^2 t(7 - 2\cos t)\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j} + 4\cos t\sin^2 t\mathbf{k},$$

ezzel a kiszámítandó integrál

$$
\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\sin^3 t(7-2\cos t) + 2\cos^4 t + 8\cos t \sin^3 t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2\cos^4 t + 28\sin^3 t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

6. Oldja meg az $(1+x^2)y'' = (1-2x)y'$ differenciálegyenletet $y(0)=3$, $y'(0)=2$ kezdeti feltétel mellett.
   Megoldás. Az egyenlet a $v=y'$ új változóra nézve elsőrendű, szétválasztható:
   $$\frac{v'}{v} = \frac{1-2x}{1+x^2},$$
   Mindkét oldalt integrálva $v(0)=y'(0)=2$ figyelembevételével
   $$\ln\frac{v(x)}{2} = \int_0^x \frac{v'(\xi)}{v(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1-2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \left[\arctan\xi - \ln(1+\xi^2)\right]_0^x = \arctan x - \ln(1+x^2),$$
   tehát $v(x) = 2\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$. Újra integráljuk $y(0)=3$ felhasználásával:
   $$y(x) = y(0) + \int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1 + 2e^{\arctan x}.$$

7. Oldja meg az $y'' - y' - 6y = xe^x$ differenciálegyenletet $y(0)=y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.
   Megoldás. A homogén egyenlet $y''-y'-6y=0$, ennek karakterisztikus polinomja $\lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$. A gyökök $\lambda=-2$ és $\lambda=3$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}$.
   A jobb oldal polinomszor exponenciális, nincsen külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x)e^x$ alakban kereshetjük:
   $$
   \begin{aligned}
   y'(x) &= (C_0 + C_1 + C_1x)e^x \\
   y''(x) &= (C_0 + 2C_1 + C_1x)e^x
   \end{aligned}
   $$
   behelyettesítése után az egyenlet
   $$
   \begin{aligned}
   xe^x &= (C_0 + 2C_1 + C_1x)e^x - (C_0 + C_1 + C_1x)e^x - 6(C_0 + C_1x)e^x \\
   &= (-6C_0 + C_1 - 6C_1x)e^x,
   \end{aligned}
   $$
   ami akkor teljesül minden x-re, ha az
   $$
   \begin{aligned}
   0 &= -6C_0 + C_1 \\
   1 &= -6C_1
   \end{aligned}
   $$
   egyenletrendszer. Ebből $C_1 = -\frac{1}{6}$, $C_0 = -\frac{1}{36}$, tehát az általános megoldás és annak deriváltja
   $$
   \begin{aligned}
   y(x) &= -\frac{1}{36}e^x - \frac{1}{6}xe^x + Ae^{-2x} + Be^{3x} \\
   y'(x) &= -\frac{7}{36}e^x - \frac{1}{6}xe^x - 2Ae^{-2x} + 3Be^{3x}.
   \end{aligned}
   $$
   A kezdeti feltétel alapján
   $$
   \begin{aligned}
   0 = y(0) &= -\frac{1}{36} + A + B \\
   0 = y'(0) &= -\frac{7}{36} - 2A + 3B,
   \end{aligned}
   $$
   tehát $A = -\frac{1}{45}$, $B = \frac{1}{20}$, a keresett megoldás
   $$y(x) = -\frac{1}{36}e^x - \frac{1}{6}xe^x - \frac{1}{45}e^{-2x} + \frac{1}{20}e^{3x}.$$