Matematika A3 szigorlat – 2017. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a Weierstrass-tételt.
4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.
7. Ismertesse egy folytonos vektormező vonalmenti integráljának kiszámítási módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott görbe mentén.
8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.
9. Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \frac{1}{1+\sqrt{n}}}{n + \ln n} x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2 y + 2x^2 - 3y + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y^2 z\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ vektormezőt a $4x^2 + y^2 = 4$, $2x + z = 7$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.
6. Oldja meg az $(1 + x^2)y'' = (1 - 2x)y'$ differenciálegyenletet $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Oldja meg az $y'' - y' - 6y = xe^x$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.