Matematika A3 szigorlat – 2017. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1+\sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

3. Írja fel az f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.

   Megoldás. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$.

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

6. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

7. Ismertesse egy folytonos vektormező felületi integráljának kiszámításának módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott felület mentén.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\,du\,dv$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy-Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n} + \sqrt{2n+9}} \qquad\qquad b_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}$$

Megoldás. Az első sorozatot felülről becsülhetjük:

$$0 \le a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n} + \sqrt{2n+9}} \le \frac{8n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n}} \le 8n^{3-2\arctan n}.$$

Mivel $2\arctan n \to \pi > 3$, bármely $\epsilon \in (0, \pi - 3)$-hoz létezik olyan n_0, hogy $n \ge n_0$ esetén $3 - 2\arctan n < \epsilon$. Emiatt $n^{3-2\arctan n} \to 0$, tehát $a_n \to 0$.

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2-n} = \left[\left(1 + \left(-1 + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{-1+\cos\frac{1}{n}}}\right]^{(-1\cos\frac{1}{n}(n^2-n)}$$

A szögletes zárójelen belüli rész határértéke e, mivel $-1 + \cos\frac{1}{n} \to 0$. A külső kitevő határértéke

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)(n^2-n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2\frac{1}{n} - 1}{\cos\frac{1}{n} + 1}(n^2-n)\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tehát $b_n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2. Számítsa ki a következő integrált: $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 10x^2 + 25}{x^4 - 4x^3 + 5x^2}\,\mathrm{d}x$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, ezért először parciális törtekre kell bontani. A nevező $x^2(x^2 - 4x + 5) = x^2((x-2)^2 + 1)$, tehát alkalmas együtthatókkal

$$\frac{4x^3 - 10x^2 + 25}{x^4 - 4x^3 + 5x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 5}$$

teljesül. A közös nevezővel megszorozva

$$\begin{aligned}4x^3 - 10x^2 + 25 &= A(x^3 - 4x^2 + 5x) + B(x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)x^2\\ &= (A + C)x^3 + (-4A + B + D)x^2 + (5A - 4B)x + 5B\end{aligned}$$

adódik, tehát

$$\begin{aligned}4 &= A + C\\ -10 &= -4A + B + D\\ 0 &= 5A - 4B\\ 25 &= 5B,\end{aligned}$$

az egyenletrendszer megoldása $A = 4$, $B = 5$, $C = 0$, $D = 1$. Ezt felhasználva

$$\int \frac{4x^3 - 10x^2 + 25}{x^4 - 4x^3 + 5x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = 4\ln x - \frac{5}{x} + \arctan(x-2) + C$$

3. A c valós paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az alábbi egyenletrendszernek? Oldja meg ezen érték mellett az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_3 &= 5\\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -4\\ 3x_2 - x_3 &= -5\\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= c\end{aligned}$$

Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja egyenlő. Ezt többféleképp lehet ellenőrizni, de mivel meg is fogjuk oldani az egyenletrendszert, érdemes mindjárt Gauss-eliminációt használni:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & -3 & 5 & c \end{bmatrix} \overset{s_1-s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & -3 & 5 & c \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & -12 & -17 & -22 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -15 & -16 & c-27 \end{bmatrix}$$

$$\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -12 & -17 & -22 \\ 0 & -15 & -16 & c-27 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3+4s_2 \\ s_4+5s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & -42 \\ 0 & 0 & -21 & c-52 \end{bmatrix} \overset{s_4-s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & c-10 \end{bmatrix}.$$

Innen láthatjuk, hogy az együtthatómátrix rangja 3, míg a kivőbített mátrix rangja pontosan akkor 3, ha $c = 10$. Ha ez teljesül, akkor visszahelyettesítéssel megkapjuk a megoldást: $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = -1$.

4. Számítsa ki az alábbi integrált. (Útmutatás: cserélje fel az integrálás sorrendjét.)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xye^{x^6} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Megoldás. Normáltartományon kell integrálni, de az x szerinti integrálásnál a primitív függvény nem elemi, tehát közvetlenül nem tudjuk kiszámolni. Az integrálás sorrendjének felcserélésével próbálkozhatunk: a tartományt a $0 \le \sqrt{y} \le x \le 1$ egyenlőtlenségek határozzák meg, ez azzal ekvivalens, hogy $0 \le y \le x^2 \le 1$, tehát

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xye^{x^6} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{x^2} xye^{x^6} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 xe^{x^6} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \int_0^1 6x^5 e^{x^6} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \left[e^{x^6}\right]_0^1 = \frac{e-1}{12}. \end{aligned}$$

5. Integrálja az $f(x,y,z) = \sqrt{2-y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.

Megoldás. A görbe $x = 0$ síkra eső vetülete az origó középpontú egységkör, amit $t \mapsto \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ módon paraméterezetünk. Az y koordináta viszont a második egyenlet alapján meghatározza az x koordinátát, tehát a megadott görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (3 - \cos t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ ($t \in [0, 2\pi]$). A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\sin t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2}.$$

A skalármező a görbén kiértékelve

$$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2 - \cos^2 t},$$

tehát a meghatározandó integrál

$$\begin{aligned} \int f \,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-\cos^2 t}\sqrt{2\sin^2 t + \cos^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos^2 t) \,\mathrm{d}t \\ &= 4\pi - \pi = 3\pi. \end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektormezőt azon téglatest befelé irányított felületén, amelynek egyik csúcsa az origó, és az onnan kiinduló élvektorok $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Megoldás. Zárt felületen kell integrálni a vektormezőt, tehát használható a Gauß-Osztrogradszkij-tétel. A téglatest egy paraméterezése $\mathbf{r}(u, v, w) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$, ahol $(u, v, w) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. A Jacobi-determináns (vagyis $\mathbf{r}$ parciális deriváltjainak vegyesszorzata)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

ennek abszolútértékével kell majd $\mathbf{u}$ divergenciáját szorozni.
A divergencia

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= 2y - 2y + x = x, \end{aligned}$$

tehát

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v, w)) = u + v - w.$$

Mivel a felület irányítása befelé mutat, a divergencia térfogati integráljának ellentettjét kell venni. Ha S jelöli a felületet befelé mutató irányítással, V a téglatest belsejét, ∂V pedig a peremét kifelé mutató irányítással, akkor

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= -\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 6(u + v - w) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w = -3. \end{aligned}$$

7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. A megoldás 0 középpontú Taylor-sor alakjában keressük:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Ezt tagonkénti deriválás után az egyenlet bal oldalába helyettesítjük, majd az indexek eltolásával elérjük, hogy minden szummában x ugyanolyan kitevőjű hatványa szerepeljen:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y &= (x^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n-1)(n-2)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) x^n. \end{aligned}$$

A jobb oldalon 0, tehát a bal oldalon is 0 az x^n együtthatója, amiből az

$$a_{n+2} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

rekurziót kapjuk. A kezdeti feltétel alapján $a_0 = 1$ és $a_1 = 0$. A rekurzió alapján a páratlan indexű együtthatók mind 0-val egyenlőek. A páros indexűek:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1 \cdot (-2)}{2 \cdot 1} a_0 = 1 \\ a_4 &= \frac{1 \cdot 0}{4 \cdot 3} a_2 = 0 \\ a_6 &= \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} a_4 = 0, \end{aligned}$$

stb. A megoldás ennek alapján $y(x) = 1 + x^2$.