Matematika A3 szigorlat – 2017. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1 + \sqrt{3}i$ számot.
2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második deriváltja segítségével?
3. Írja fel az f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
6. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.
7. Ismertesse egy folytonos vektormező felületi integráljának kiszámításának módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott felület mentén.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy-Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:
$$a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2 \arctan n} + \sqrt{2n+9}} \qquad\qquad b_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2-n}$$
2. Számítsa ki a következő integrált: $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 10x^2 + 25}{x^4 - 4x^3 + 5x^2} \, \mathrm{d}x$
3. A c valós paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az alábbi egyenletrendszernek? Oldja meg ezen érték mellett az egyenletrendszert.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_2 - x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= c \end{aligned}$$
4. Számítsa ki az alábbi integrált. (Útmutatás: cserélje fel az integrálás sorrendjét.)
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xye^{x^6} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2 - y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektormezőt azon téglatest befelé irányított felületén, amelynek egyik csúcsa az origó, és az onnan kiinduló élvektorok $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.