Matematika A3 szigorlat – 2017. szeptember 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása a derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

3. Definiálja egy $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \le b < 1$, és létezik a $\lim_{b\to 1-} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és 1 közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát. Adjon példát végtelen sok vektorból álló lineárisan független rendszerre.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Példa: az egyváltozós polinomok vektorterében az $1, x, x^2, x^3, \ldots$ vektorok lineárisan függetlenek.

6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.

   Megoldás.

$$
\begin{aligned}
&f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f''_{yy}(y - y_0)^2
\end{aligned}
$$

7. Ismertesse egy folytonos vektormező vonalmenti integráljának kiszámítási módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott görbe mentén.

   Megoldás. Ha $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonos, akkor a $\mathbf{v}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}$ görbe mentén $I = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.

   Megoldás. Az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

$$
\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi
$$

   rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

$$
W(x) = \begin{vmatrix}
f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\
f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix}
$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \qquad\qquad b_n = \frac{2 + 17^n - e^{(n^2)}}{n^9 + n! + \ln^5 n}$$

Megoldás.

$$a_n = n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = n^2\frac{1-\cos^2\frac{1}{n}}{1+\cos^2\frac{1}{n}} = \left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos^2\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2},$$

mivel a zárójelben lévő kifejezés $1/n$ függvénye és $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, míg a második tényező nevezőjének 2 a határértéke.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2 + 17^n - e^{(n^2)}}{n^9 + n! + \ln^5 n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(n^2)}}{n!}\frac{\frac{2}{e^{(n^2)}} + \frac{17^n}{e^{(n^2)}} - 1}{\frac{n^9}{n!} + 1 + \frac{\ln^5 n}{n!}}$$

A második tényező határértéke -1, az első tényező pedig végtelenhez tart, hiszen $n! \ll n^n < (e^n)^n = e^{n^2}$. Emiatt a szorzat mínusz végtelenhez tart.

2. Végezze el az alábbi függvény teljes függvényvizsgálatát.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2x^2}} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, a függvény páros, nem periodikus, egyetlen zérushelye a 0, mert az exponenciális függvény sehol sem 0. 0-ban mindkét oldalról 0-hoz tart (és így folytonos), hiszen $\lim_{x\to 0} -\frac{3}{2x^2} = -\infty$, és $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{3}{2x^2} = 0$ miatt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, tehát mindkét irányban vízszintes aszimptotája van. Mivel az exponenciális függvény szigorúan pozitív, az $x = 0$ pontban a függvénynek (globális) minimuma van. Az $x > 0$ félegyenesen szigorúan monoton nő, így a párosság figyelembevételével az értékkészlet $R_f = [0, 1)$.
Ha $x \neq 0$, akkor a derivált és a második derivált

$$f'(x) = e^{-\frac{3}{2x^2}}\frac{3}{x^3} \qquad f''(x) = 9e^{-\frac{3}{2x^2}}\frac{1-x^2}{x^6}.$$

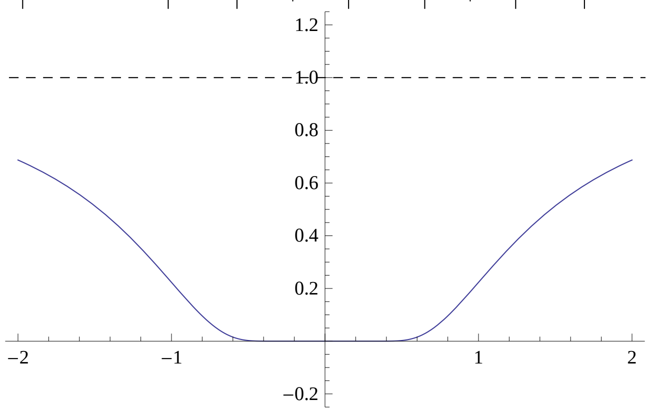
Az előbbinek nincsen zérushelye, az utóbbinak pedig $x = \pm 1$ zérushelye.
A 0 pontban a derivált

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{3}{2h^2}}}{h} = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{t} = 0,$$

a második derivált

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{3}{2h^2}}\frac{3}{h^3}}{h} = \lim_{t\to\infty} 3e^{-\frac{3}{2}t}t^2 = 0.$$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f		infl		min		infl	
f'	-	-	-	0	+	+	+
f''	-	0	+	0	+	0	-



3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -12 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az első oszlop szerint kifejtve

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (7-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & -12 \\ 3-\lambda & 2 \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda - 24) + 5(-12\lambda + 34) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1), \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek $2, i, -i$. Az $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ egyenletet Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix} \overset{s_3 - s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

tehát a 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok $(2, -2, 1)$ többszörösei. Az i sajátértékhez tartozó sajátvektorokat hasonlóan határozhatjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 7-i & -1 & -12 \\ 0 & 3-i & 2 \\ 5 & 0 & -8-i \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8-i \\ 0 & 3-i & 2 \\ 7-i & -1 & -12 \end{bmatrix} \overset{s_3 + \frac{-7+i}{5} s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8-i \\ 0 & 3-i & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{5} - \frac{i}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8-i \\ 0 & 3-i & 2 \end{bmatrix}$$

alapján ezek $(8 + i, -3 - i, 5)$ többszörösei. A $-i$ sajátértékhez tartózó sajátvektorok ezek konjugáltjai lesznek, tehát $(8 - i, -3 + i, 5)$ többszörösei.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. A függvény mindenhol differenciálható, lokális szélsőértéke ott lehet, ahol a gradiens 0.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 4x(x^2 - 1) \\ f'_y(x, y) &= -4y(y^2 - 1) \end{aligned}$$

alapján a lehetséges helyek $x = -1, 0, 1$, $y = -1, 0, 1$ (összesen 9 pont). A második derivált mátrix

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix},$$

sajátértékei $12x^2 - 4$ és $-12y^2 + 4$, mivel diagonális és ezek a főátló elemei. Az előbbi pozitív, ha $x = \pm 1$, negatív, ha $x = 0$, míg az utóbbi pozitív, ha $y = 0$, negatív, ha $y = \pm 1$. Tehát lokális minimum van az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pontokban, lokális maximum van a $(0, 1)$ és $(0, -1)$ pontokban, míg $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$ nyeregpontok.

5. Számítsa ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = \dfrac{y}{1 + (xy + z^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{1 + (xy + z^2)^2}\mathbf{j} + \dfrac{2z}{1 + (xy + z^2)^2}\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t(1 - t)\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek között.

Megoldás. Az integrált közvetlenül is ki lehet számolni, de ha észrevesszük, hogy a vektormező potenciálos, akkor egyszerűbb a görbementi integrálra vonatkozó Newton–Leibniz-tételt használni. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x \frac{0}{1 + (\xi \cdot 0 + 0^2)^2}\, \mathrm{d}\xi + \int_0^y \frac{x}{1 + (x\eta + 0^2)^2}\, \mathrm{d}\eta + \int_0^z \frac{2\zeta}{1 + (xy + \zeta^2)^2}\, \mathrm{d}\zeta \\ &= 0 + \left[\arctan x\eta\right]_{\eta=0}^{\eta=y} + \left[\arctan(xy + \zeta^2)\right]_{\zeta=0}^{\zeta=z} \\ &= \arctan xy - 0 + \arctan(xy + z^2) - \arctan(xy) = \arctan(xy + z^2). \end{aligned}$$

Ennek parciális deriváltjai valóban $\mathbf{v}$ komponensei. A Newton–Leibniz-tétel szerint a keresett integrál értéke egyenlő f megváltozásával a két végpont között, tehát

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(1, 1, 0) - f(0, 0, 0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 3 - y$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományt kitöltő egyenletes tömegeloszlású testnek?

Megoldás. Az alakzatot két sík vágja ki egy olyan hengerből, amelynek tengelye a z tengely, így érdemes hengerkoordinátákat használni a számoláshoz: $\mathbf{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns r. Az integrálási tartomány ekkor $r \in [0,2]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $0 \le z \le 3 - \sin\phi$. A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a térfogat hányadosai, az előbbieket a koordinátafüggvények integrálásával határozhatjuk meg. A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\sin\phi} r\cos\phi \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r &= \int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (3\cos\phi - \cos\phi\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0 \\
\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\sin\phi} r\sin\phi \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r &= \int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(3\sin\phi - \sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi = -\frac{8}{3}\pi \\
\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\sin\phi} z \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r &= \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 3\sin\phi + \frac{\sin^2\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi = 19\pi
\end{aligned}$$

és

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\sin\phi} r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (3-\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi = 12\pi.$$

Ennek alapján a tömegközéppont koordinátái: $(0, -\frac{2}{9}, \frac{19}{12})$.

7. Határozza meg az $y^{(4)} - 8y'' + 16y = e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldsát.

   Megoldás. Az egyenlet állandó együtthatós lineáris, először a homogén egyenletet oldjuk meg a karakterisztikus egyenlet segítségével: $0 = \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)^2$. A gyökök ± 2, mindkettő kétszeres, így a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$.
   Az inhomogén tag exponenciális, a kitevőben x együtthatója gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát külső rezonancia is van. Ennek megfelelően az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = Cx^2e^{2x}$ alakban keressük. A deriváltak:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 2Ce^{2x}x + 2Ce^{2x}x^2 \\
y''(x) &= 2Ce^{2x} + 8Ce^{2x}x + 4Ce^{2x}x^2 \\
y'''(x) &= 12Ce^{2x} + 24Ce^{2x}x + 8Ce^{2x}x^2 \\
y^{(4)}(x) &= 48Ce^{2x} + 64Ce^{2x}x + 16Ce^{2x}x^2.
\end{aligned}$$

   Ezeket az egyenletbe írva

$$\begin{aligned}
e^{2x} &= 48Ce^{2x} + 64Ce^{2x}x + 16Ce^{2x}x^2 - 8(2Ce^{2x} + 8Ce^{2x}x + 4Ce^{2x}x^2) + 16Cx^2e^{2x} \\
&= 32Ce^{2x}
\end{aligned}$$

   adódik, tehát $C = \frac{1}{32}$, és így az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{32}x^2e^{2x} + Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}.$$