Matematika A3 szigorlat – 2017. szeptember 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása a derivált segítségével?
3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát. Adjon példát végtelen sok vektorból álló lineárisan független rendszerre.
6. Írja fel az $f(x,y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Ismertesse egy folytonos vektormező vonalmenti integráljának kiszámítási módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott görbe mentén.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \qquad\qquad b_n = \frac{2 + 17^n - e^{(n^2)}}{n^9 + n! + \ln^5 n}$$

2. Végezze el az alábbi függvény teljes függvényvizsgálatát.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2x^2}} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -12 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Számítsa ki a $\mathbf{v}(x,y,z) = \dfrac{y}{1+(xy+z^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{1+(xy+z^2)^2}\mathbf{j} + \dfrac{2z}{1+(xy+z^2)^2}\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t(1-t)\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek között.
6. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3 - y$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományt kitöltő egyenletes tömegeloszlású testnek?
7. Határozza meg az $y^{(4)} - 8y'' + 16y = e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldsát.