Matematika A3 szigorlat – 2017. december 18.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

3. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$.

5. Adja meg a mátrixok rangjának három ekvivalens jellemzését.

   Megoldás. Néhány példa: oszlop/sorvektorok által kifeszített altér dimenziója, lineárisan független oszlop/sorvektorok maximális száma, maximális méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix mérete, képtér dimenziója, lépcsős/redukált lépcsős alakban a nemnulla sorok száma.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x,y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_x(x-x_0) - A_y(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.

   Megoldás. Az $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

   $$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

   rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

    $$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeit.

$$a_n = (n+2)\ln\left(\frac{n-7}{n+2}\right) \qquad\qquad b_n = n\left(\sqrt{n^4+n^3+n} - \sqrt{n^4+n^3-3n}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (n+2)\ln\left(\frac{n-7}{n+2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{-9}{n+2}\right)^{(n+2)}\right] \\
&= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+2}\right)^{(n+2)}\right] \\
&= \ln e^{-9} = -9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n^3+n} - \sqrt{n^4+n^3-3n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^4+n^3+n-(n^4+n^3-3n)}{\sqrt{n^4+n^3+n}+\sqrt{n^4+n^3-3n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt{n^4+n^3+n}+\sqrt{n^4+n^3-3n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^3}}} = 4
\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét.

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a számláló foka kisebb mint a nevezőé, tehát parciális törtekre bontással kezdjük. A nevező $x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4)$, tehát

$$\frac{1}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

teljesül valamely A, B, C, D valós számokra. A közös nevezővel megszorozva $1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (4A+C)x + (4B+D)$ a feltétel, amiből $B = D = 0$, $A = -C = \frac{1}{3}$. Ennek segítségével először a primitív függvényt határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

A kiszámítandó integrál improprius, az integrálási tartományt két részre kell bontani, és mindkét részt határértékkel definiáljuk:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}\arctan a + \frac{1}{6}\arctan\frac{a}{2}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}\arctan b - \frac{1}{6}\arctan\frac{b}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Van-e sajátvektorokból álló bázis?

Megoldás. A sajátértékek a $\det(A - \lambda I)$ polinom gyökei. A determinánst számolhatjuk például az első sor szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 8 & -\lambda & 5 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)+10) - (8 - 8\lambda - 5) + (-16+\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3, \end{aligned}$$

tehát az egyetlen sajátérték az 1 (háromszoros multiplicitással). Az ehhez tartozó sajátvektorok meghatározásához végezzünk Gauss-eliminációt az $A - I$ mátrixon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát a megoldás

$$t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Eszerint a sajátvektorok csak egydimenziós alteret feszítenek ki, vagyis nem létezik sajátvektorokból álló bázis.

4. Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \arcsin x}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát.

Megoldás. Először az $\arcsin x$ Taylor-sorát határozzuk meg. A derivált a binomiális sor speciális eseteként írható fel:

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

A hatványsort a konvergenciatartomány belsejében tagonként integrálhatjuk. Figyelembe véve, hogy $\arcsin 0 = 0$, ebből

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

adódik. Az első tag együtthatója 1, tehát $f(x)$ analitikus és

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n-1}.$$

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe $x \geq 0$, $y \geq 0$ darabjának tömegközéppontját.

Megoldás. A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok (azaz a koordinátafüggvények integráljai) és az ívhossz hányadosai. A görbe egy lehetséges paraméterezése $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ $(t \in [0, \pi/2])$, a szükséges integrálok

$$\int_0^{\pi/2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos t|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin t|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Ennek alapján a tömegközéppont a $(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi})$ pontban van.

Megjegyzés. Úgy is lehet érvelni, hogy az alakzat az $x = y$ egyenesre tengelyesen szimmetrikus, tehát a tömegközéppont is ezen az egyenesen helyezkedik el. Ekkor elég az egyik koordinátát meghatározni.

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (x^2z + xz^2)\mathbf{j} + (z^3 + zy^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az origó középpontú 2 egység sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Az integrált közvetlenül is ki lehet számítani, de a számolás egyszerűbb, ha a Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazásával térfogati integrálra vezetjük vissza. Ehhez ki kell számolni a divergenciát:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) &= \frac{\partial(x^3+2xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2z+xz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3+zy^2)}{\partial z} \\ &= 3x^2 + 2y^2 + 0 + 3z^2 + y^2 = 3(x^2+y^2+z^2)\end{aligned}$$

   A keresett integrál megegyezik a $\operatorname{div}\mathbf{u}$ skalármező origó középpontú 2 egység sugarú gömbön vett térfogati integráljával. Ennek számolásához érdemes gömbi koordinátákat használni: $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, $\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)) = 3r^2$, az integrálási tartományt a $0 \le r \le 2$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Az integrál tehát

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \qquad = 3\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r \\ &= 6\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = 12\pi\cdot\frac{32}{5} = \frac{384}{5}\pi.\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' - 4y' + 5y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg: $y'' - 4y' + 5y = 0$. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 5$, ennek gyökei a megoldóképlet alapján

$$\lambda_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i.$$

   Eszerint a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$.
   Az inhomogén tag polinom, tehát az inhomogén egyenlet megoldását is kereshetjük ugyanilyen fokú polinom alakban. $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ behelyettesítése után az egyenlet

$$2C_2 - 4(C_1 + 2C_2x) + 5(C_0 + C_1x + C_2x^2) = x^2,$$

   ami akkor teljesül minden x értékre, ha

$$\begin{aligned} 2C_2 - 4C_1 + 5C_0 &= 0 \\ -8C_2 + 5C_1 &= 0 \\ 5C_2 &= 1. \end{aligned}$$

   Az egyenletrendszer megoldása $C_2 = \frac{1}{5}$, $C_1 = \frac{8}{25}$, $C_0 = \frac{22}{125}$. Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{22}{125} + \frac{8}{25}x + \frac{1}{5}x^2 + Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x.$$