Matematika A3 szigorlat – 2017. december 18.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?
4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
5. Adja meg a mátrixok rangjának három ekvivalens jellemzését.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeit.
$$a_n = (n+2)\ln\left(\frac{n-7}{n+2}\right) \qquad b_n = n\left(\sqrt{n^4+n^3+n} - \sqrt{n^4+n^3-3n}\right)$$
2. Számítsa ki az
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
integrál értékét.
3. Határozza meg az
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Van-e sajátvektorokból álló bázis?
4. Írja fel az
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\arcsin x}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$
függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát.
5. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe $x \geq 0$, $y \geq 0$ darabjának tömegközéppontját.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3+2xy^2)\mathbf{i} + (x^2z+xz^2)\mathbf{j} + (z^3+zy^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az origó középpontú 2 egység sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az $y'' - 4y' + 5y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.