Matematika A3 szigorlat – 2018. január 08.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

2. Írja le logikai jelek segítségével, hogy mit jelent az, hogy egy számsorozat divergens. Adjon példát korlátos divergens számsorozatra.

   Megoldás. Az (a_n) sorozat divergens, ha $\forall A \in \mathbb{R} \exists \epsilon > 0 \forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq N_0 : |A - a_n| \geq \epsilon$. Például $a_n = (-1)^n$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?

   Megoldás. $\mathbf{v}$ potenciálos, ha létezik olyan f függvény, amivel $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ teljesül.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül.

10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2-1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. A függvény a nevező zérushelyeit kivéve mindenhol értelmezett, tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$. Páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} &= -\lim_{x\to-\infty} = \infty \\
\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}+} &= -\lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{3}}-} = \infty \\
\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}-} &= -\lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{3}}+} = -\infty.
\end{aligned}$$

   Az értékkészlet ennek alapján $R_f = \mathbb{R}$, hiszen minden értéket már a $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ intervallumon felvesz. A deriváltak

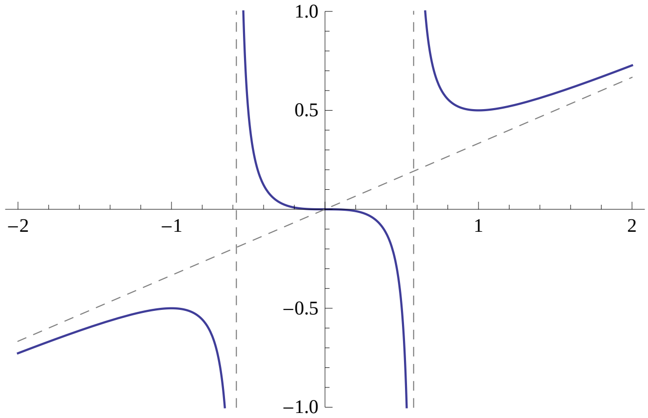
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2(3x^2-1) - x^3\cdot 6x}{(3x^2-1)^2} = \frac{3x^2(x^2-1)}{(3x^2-1)^2} \\
f''(x) &= \frac{(12x^3-6x)(3x^2-1)^2 - x^3\cdot 2(3x^2-1)\cdot 6x}{(3x^2-1)^2} = \frac{-6x(x^2+1)}{(3x^2-1)^3},
\end{aligned}$$

   tehát f' zérushelyei $0, -1, 1$, f'' egyetlen zérushelye 0. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)$	0	$(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$	1	$(1,\infty)$
f	╭	max	╮	X	╰	infl	╮	X	╰	min	╯
f'	+	0	-	X	-	0	-	X	-	0	+
f''	-	-	-	X	+	0	-	X	+	+	+

   A ferde aszimptoták egyenlete $y = mx + b$, ahol

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3x^2-1} = \frac{1}{3} \\
b &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3(3x^2-1)} = 0.
\end{aligned}$$



2. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az első integrált két parciális integrálással lehet kiszámítani, a logaritmusos tényezőt deriválva:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \int \frac{x^3}{3} 2(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C.
\end{aligned}$$

A második integrálban a négyzetgyök alatt másodfokú polinom áll, ezt teljes négyzetté alakítjuk: $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, tehát $x-2=\sinh t$, $\mathrm{d}x=\cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítés célravezető, mivel ekkor $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$. Eszerint

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x &= \int (2+\sinh t)\cosh t\cdot\cosh t\,\mathrm{d}t\\
&= \int (2\cosh^2 t+\sinh t\cosh^2 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int (1+\cosh(2t)+\sinh t\cosh^2 t)\,\mathrm{d}t\\
&= t+\frac{1}{2}\sinh(2t)+\frac{\cosh^3 t}{3}+C\\
&= \operatorname{arsinh}(x-2)+\frac{1}{2}\sinh(2\operatorname{arsinh}(x-2))+\frac{\cosh^3\operatorname{arsinh}(x-2)}{3}+C\\
&= \operatorname{arsinh}(x-2)+\frac{1}{3}(x^2-x-1)\sqrt{x^2-4x+5}+C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$A=\begin{bmatrix}10 & -4 & 17\\ 4 & 0 & 6\\ -4 & 2 & -7\end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Van-e sajátvektorokból álló bázis?

Megoldás. A sajátértékek $\det(A-\lambda I)$ gyökei. A determináns az első sor szerint kifejtve

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix}10-\lambda & -4 & 17\\ 4 & -\lambda & 6\\ -4 & 2 & -7-\lambda\end{vmatrix} = (10-\lambda)(\lambda^2+7\lambda-12)-(-4)(-4\lambda-28+24)+17(8-4\lambda)\\
&= -\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Ennek három különböző (és így egyszeres) gyöke van: 0, 1, 2, tehát létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda=0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}10 & -4 & 17\\ 4 & 0 & 6\\ -4 & 2 & -7\end{bmatrix} \overset{\substack{s_2/2\\ s_1\leftrightarrow s_2}}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 10 & -4 & 17\\ -4 & 2 & -7\end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-5s_1\\ s_3+2s_1}}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} \overset{s_2+2s_3}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}9 & -4 & 17\\ 4 & -1 & 6\\ -4 & 2 & -8\end{bmatrix} \overset{\substack{s_1-2s_2\\ s_3+s_2}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 4 & -1 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \overset{s_2-4s_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 7 & -14\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \overset{s_2-7s_3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda=2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}8 & -4 & 17\\ 4 & -2 & 6\\ -4 & 2 & -9\end{bmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix}4 & -2 & 6\\ 8 & -4 & 17\\ -4 & 2 & -9\end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1\\ s_3+s_1}}{\sim} \begin{bmatrix}4 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \overset{\substack{s_1/2\\ s_2/5\\ s_3+3s_2}}{\sim} \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$ többszörösei.

4. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{-3n}\sqrt{n+9}}{n\ln n}x^n$ sor konvergenciatartományát.

Megoldás. A megadott függvénysor 0 középpontú hatványsor, először a konvergenciasugarat határozzuk meg a Cauchy–Hadamard-tétel segítségével:

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{-3n}\sqrt{n+9}}{n\ln n}}=2^{-3}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n+9}}{n\ln n}}=2^{-3},$$

mivel n bármely (pozitív főegyütthatójú) polinomjának n. gyökének 1 a határértéke és $1 \le \ln n \le \sqrt{n} \le n$ ha $n \ge 3$.
Meg kell még vizsgálni a konvergenciaintervallum két végpontját, azaz a -8 és 8 pontokat. Az $x = -8$ pontban

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-3n}\sqrt{n+9}}{n \ln n}(-8)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+9}}{n \ln n}$$

Lebniz-típusú sor: a tagok előjele váltakozik, az abszolútérték

$$\frac{\sqrt{n+9}}{n \ln n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}\frac{1}{\ln n},$$

ami két monoton csökkenő pozitív nullsorozat szorzata, tehát maga is monoton csökkenő nullsorozat. Tehát az $x = -8$ pontban a sor konvergens.
Az $x = 8$ pontban a tagokat alulról becsülhetjük: tetszőleges $\alpha > 0$ számhoz létezik olyan küszöb, ami felett $\ln n \le n^{\alpha}$, tehát

$$\frac{2^{-3n}\sqrt{n+9}}{n \ln n}8^n = \frac{\sqrt{n+9}}{n \ln n} \ge \frac{\sqrt{n}}{n \cdot n^{\alpha}} = n^{-\frac{1}{2}-\alpha}$$

pl. $\alpha = 1/2$ választással azt kapjuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor minorálja az eredeti sort, tehát itt divergens.
A konvergenciatartomány $[-8, 8)$.

5. Integrálja az $f(x, y, z) = x^2 z$ skalármezőt az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalást $0 \le z \le 4$ darabján.

   Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\mathbf{i} + 2\sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, ahol $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 4]$. $f(\mathbf{r}(u, v)) = 4\cos^2(u)v$, a parciális deriváltak vektoriális szorzatának abszolútértéke pedig

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = |(-2\sin u\mathbf{i} + 2\cos u\mathbf{j}) \times \mathbf{k}| = \sqrt{(-2\sin u)^2 + (2\cos u)^2} = 2.$$

   Az integrál ezek alapján

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 4\cos^2(u)v \cdot 2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 8\int_0^4 v\,\mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = 8\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^4 \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{2\pi} = 64\pi.$$

6. Határozza meg az $\dfrac{1-xy}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}y' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

   Megoldás.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2},$$

   tehát az egyenlet egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\eta = \arcsin x + y\sqrt{1-x^2}$$

   Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, a kezedeti feltétel alapján $C = u(0, y(0)) = u(0, 1) = 1$. Explicit alakban $y(x) = (1 - \arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$.

7. Oldja meg az $y''' + 6y'' + 9y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -3$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet homogén lineáris állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2$, tehát belső rezonancia van. Az általános megoldás és deriváltjai

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + C & 1 &= y(0) = A + C \\ y'(x) &= -3Ae^{-3x} + Be^{-3x} - 3Bxe^{-3x} & -1 &= y'(0) = -3A + B \\ y''(x) &= 9Ae^{-3x} - 6Be^{-3x} + 9Bxe^{-3x} & -3 &= y''(0) = 9A - 6B, \end{aligned}$$

   az egyenletekből $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$. A megoldás $y(x) = e^{-3x} + 2xe^{-3x}$.