Matematika A3 szigorlat – 2018. január 08.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Írja le logikai jelek segítségével, hogy mit jelent az, hogy egy számsorozat divergens. Adjon példát korlátos divergens számsorozatra.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 17 \\ 4 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Van-e sajátvektorokból álló bázis?

4. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-3n}\sqrt{n+9}}{n \ln n} x^n$ sor konvergenciatartományát.
5. Integrálja az $f(x, y, z) = x^2 z$ skalármezőt az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalást $0 \leq z \leq 4$ darabján.
6. Határozza meg az $\dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2}\,y' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.
7. Oldja meg az $y''' + 6y'' + 9y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -3$ kezdeti feltétel mellett.