**Matematika A3 szigorlat** – 2018. január 15.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   *Megoldás.* Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0$ pontbeli folytonosságát.

   *Megoldás.* $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

3. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható) $f$ függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli $n$-ed fokú Taylor-polinomját.

   *Megoldás.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k$.

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   *Megoldás.* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   *Megoldás.* Legyen $V$ vektortér a $K$ test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. Az $L$ sajátvektora $\mathbf{v}$ $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(v) = \lambda \cdot v$.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   *Megoldás.* $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   *Megoldás.* $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   *Megoldás.* Legyen $V$ korlátos tartomány, amelyet a $\partial V$ zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább $V$ egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   *Megoldás.* Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét és írja fel annak segítségével az általános megoldást.

    *Megoldás.* Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{2n^9 + 7 \cdot 3^n - n^n}{17^{-n} + n! - n^{50}} \qquad\qquad b_n = \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n^2+1} - n}$$

*Megoldás.* Az első sorozat számlálójából és a nevezőjéből is kiemeljük a legnagyobb nagyságrendű tagot:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{2\frac{n^9}{n^n} + 7\frac{3^n}{n^n} - 1}{\frac{17^{-n}}{n!} + 1 - \frac{n^{50}}{n!}} = -\infty,$$

mivel $\alpha^{-n} \ll n^\alpha \ll \alpha^n \ll n! \ll n^n$ minden $\alpha > 1$ esetén, így az első tényező végtelenhez, a második pedig $-1$-hez tart. ($f_n \ll g_n$ jelentése: $f_n/g_n \to 0$.)
A második sorozatot gyöktelenítjük:

$$b_n = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} - n)} = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{n(n^2+1-n^2)} = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right).$$

A második tényező határértéke 2. Az első tényező az $x \mapsto (e^x - 1)/x$ függvény és $n \mapsto 1/n$ kompozíciója. Mivel $1/n \to 0$, ennek határértéke

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Tehát a $b$ sorozat határértéke 2.

2. Végezze el az $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

*Megoldás.* $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} (2x^2 + x + 1)e^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} (2x^2 + x + 1)e^{-x} = \infty$$

A deriváltak

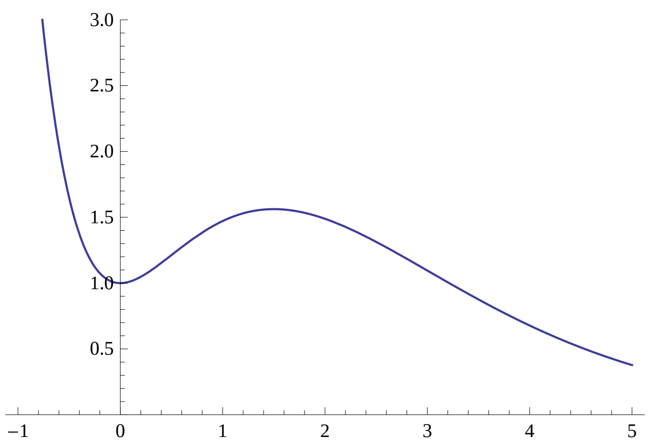
$$f'(x) = (4x+1)e^{-x} + (2x^2 + x + 1)(-e^{-x}) = x(3-2x)e^{-x}$$
$$f''(x) = (3-2x)e^{-x} + x(-2)e^{-x} + x(3-2x)(-e^{-x}) = (x-3)(2x-1)e^{-x},$$

tehát $f'$ zérushelyei 0, $3/2$, $f''$ zérushelyei pedig $1/2$ és 3. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

| | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ | $\frac{3}{2}$ | $(\frac{3}{2}, 3)$ | 3 | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | infl | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | infl | $\searrow$ |
| $f'$ | - | 0 | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $f''$ | + | + | + | 0 | - | - | - | 0 | + |

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x} = -\infty,$$

tehát nincs ferde aszimptota. ($\infty$-ben már láttuk, hogy vízszintes aszimptota van.)



3. A $c$ paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= c \\ x_1 - 3x_2 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Oldja is meg ezen érték mellett.

*Megoldás.* A kibővített mátrixon Gauss-eliminációt végzünk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & c \\ 1 & -3 & 3 & 8 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2+2s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_4-s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & 4 \\ 0 & 2 & 10 & c \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{array}\right] \overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & c \\ 0 & -6 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & c \\ 0 & 0 & 20 & 4+3c \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{array}\right] \overset{s_3 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & c \\ 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 20 & 4+3c \end{array}\right] \overset{s_4-2s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & c \\ 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12+3c \end{array}\right]$$

Az utolsó sor ellentmondás, ha $c \neq 4$, ha viszont $c = 4$, akkor az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3, tehát létezik megoldás. A lépcsős alakból alulról felfelé haladva leolvashatjuk az ismeretlenek értékét is: $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -2$, $x_1 = -\frac{2}{5}$.

4. Legyen $f$ az a $2\pi$ szerint periodikus függvény, amelyre $x \in (-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = x^3$ teljesül. Írja fel $f$ Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt?

*Megoldás.* A függvény páratlan, tehát a Fourier-sora tisztán szinusz sor: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, ahol az együtthatók

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x^3 \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3x^2 \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x^3 \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) - 3x^2 \left( -\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 6x \left( -\frac{\sin nx}{n^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x^3 \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) - 3x^2 \left( -\frac{\sin nx}{n^2} \right) + 6x \left( \frac{\cos nx}{n^3} \right) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 6 \left( \frac{\cos nx}{n^3} \right) \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2}{n} + (-1)^n \frac{12}{n^3} \end{aligned}$$

Mivel szakaszonként folytonosan differenciálható, a Fourier-sor minden pontban konvergens, összege az $f$ adott pontbeli bal- és jobboldali határértékének számtani közepe. Ez az $(2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével a függvényértékkel egyezik meg.

5. Határozza meg az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény integrálját a $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományon.

*Megoldás.* Hengerkoordinátákat érdemes használni: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns $r$, a paramétertartomány $\left\{(r, \phi, z) \middle| r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq 1 - r^2\right\}$, $f((r)(r, \phi, z)) = r$, tehát a keresett integrál

$$\begin{aligned} \int_V f \,\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r^2 \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^4) \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (4xy - 2xz)\mathbf{i} + (2x^2 + z^2)\mathbf{j} + (-x^2 + 2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ csavarvonal mentén, annak $t = 0$ és $t = \pi$ paraméterértékek közötti darabján.

*Megoldás.* $\mathbf{u}$ az egész téren differenciálható és

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) =& \left(\frac{\partial(-x^2+2yz)}{\partial y} - \frac{\partial(2x^2+z^2)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(4xy-2xz)}{\partial z} - \frac{\partial(-x^2+2yz)}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial(2x^2+z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(4xy-2xz)}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ =&(2z-2z)\mathbf{i} + (-2x-(-2x))\mathbf{j} + (4x-4x)\mathbf{k} = 0,\end{aligned}$$

tehát potenciálos. Az integrál közvetlen számolásánál valamivel egyszerűbb a görbementi integrálra vonatkozó Newton–Leibniz-tételt használni, ehhez $\mathbf{u}$ egy potenciálját kell meghatározni:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 2x^2\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z (-x^2+2y\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 0 + 2x^2y + \left[-x^2\zeta + y\zeta^2\right]_{\zeta=0}^{\zeta=z} = 2x^2y - x^2z + yz^2. \end{aligned}$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(-1,0,\pi) - f(1,0,0) = -\pi.$$

7. Határozza meg az $y' - \dfrac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}y = \dfrac{x}{1+x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

*Megoldás.* Az egyenlet inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. Minden elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)},$$

mindkét oldalt $x$ szerint integráljuk. A jobb oldalt az integráláshoz először parciális törtekre kell bontani:

$$\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

azaz $1+x+x^2 = A(1+x^2) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$, ami $A=1$, $C=1$, $B=0$ mellett lesz azonosság.

$$\ln|y(x)| = \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \arctan(x) + C,$$

tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Cxe^{\arctan x}$.
Az inhomogén egyenletet az állandók variálásának módszerével lehet megoldani: a $y(x) = c(x)xe^{\arctan x}$ behelyettesítésével kapott egyenlet

$$c'(x)xe^{\arctan x} = \frac{x}{1+x^2},$$

ebből

$$c(x) = \int \frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -e^{-\arctan x} + C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát $y(x) = -x + Cxe^{\arctan x}$.