Matematika A3 szigorlat – 2018. január 15.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.
3. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható) f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét és írja fel annak segítségével az általános megoldást.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{2n^9 + 7 \cdot 3^n - n^n}{17^{-n} + n! - n^{50}} \qquad\qquad b_n = \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$$

2. Végezze el az $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. A c paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= c \\ x_1 - 3x_2 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Oldja is meg ezen érték mellett.

4. Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre $x \in (-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = x^3$ teljesül. Írja fel f Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt?
5. Határozza meg az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény integrálját a $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományon.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (4xy - 2xz)\mathbf{i} + (2x^2 + z^2)\mathbf{j} + (-x^2 + 2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ csavarvonal mentén, annak $t = 0$ és $t = \pi$ paraméterértékek közötti darabján.
7. Határozza meg az $y' - \dfrac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)}y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.