Matematika A3 szigorlat – 2018. február 8.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.

   Megoldás. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

    $$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{10x + x^3}{1 + x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{10x + x^3}{1 + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} x \frac{\frac{10}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \pm\infty,$$

   ebből és a folytonosságból együtt következik, hogy $R_f = \mathbb{R}$.
   A deriváltak

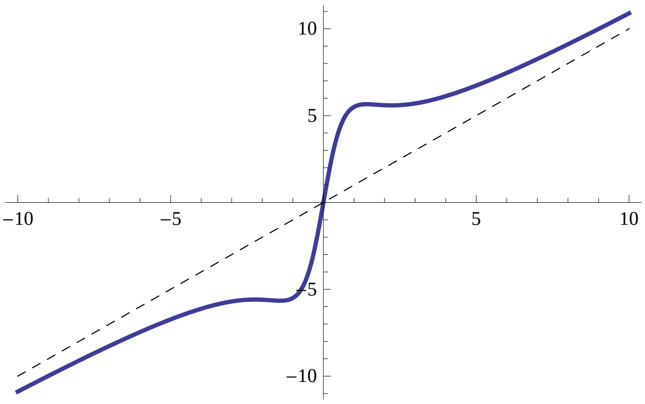
$$f'(x) = \frac{(10 + 3x^2)(1 + x^2) - (10x + x^3) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{10 - 7x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(-14x + 4x^3)(1 + x^2)^2 - (10 - 7x^2 + x^4) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{18(-3x + x^3)}{(1 + x^2)^3},$$

   tehát f' zérushelyei $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{5}$, f'' zérushelyei pedig 0 és $\pm\sqrt{3}$. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak (csak $x \geq 0$):

	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}, \infty)$
f	infl	◜	max	◝	infl	◟	min	◞
f'	+	+	0	-	-	-	0	+
f''	0	-	-	-	0	+	+	+

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{10}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{9x}{1 + x^2} = 0,$$

   tehát mindkét irányban van (közös) ferde aszimptota, egyenlete $y = x$.



2. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} \, \mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, először parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4},$$

   a közös nevezővel mindkét oldalt megszorozva

$$\begin{aligned} 1 &= A(x - 1)(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (4A + C - 2D)x + (-4A + 4B + D), \end{aligned}$$

   ez akkor teljesül minden x-re, ha

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= -A + B - 2C + D \\ 0 &= 4A + C - 2D \\ 1 &= -4A + 4B + D, \end{aligned}$$

azaz $A = -\frac{2}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{2}{25}$ és $D = -\frac{3}{25}$. Tehát

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{2}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{25}\frac{2x-3}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(-\frac{2}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{25}\frac{2x}{x^2+4} - \frac{3}{100}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{25}\ln(x^2+4) - \frac{3}{50}\arctan\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis?

Megoldás. A sajátértékek $\det(A - \lambda I)$ gyökei, a determináns a kifejtési tétel alapján

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 11-\lambda & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (11-\lambda)\begin{vmatrix} -10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((11-\lambda)(-10-\lambda) + 3\cdot 36)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda^2 - \lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)^2.
\end{aligned}$$

A sajátértékek tehát 2, -1 (egyszeresek) és 1 (kétszeres).
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 9 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1-3s_2 \\ s_2/3 \\ s_4+s_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 12 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1-4s_2 \\ s_2/3 \\ s_3/4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_3+s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 10 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1-3s_2 \\ s_3-s_4 \\ s_4\cdot(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_2-3s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
Mivel az 1 algebrai multiplicitása 2, de a hozzá tartozó sajátvektorok által kifeszített altér dimenziója csak 1, nincs sajátvektorokból álló bázis.

Megjegyzés. Azt is észre lehet venni, hogy A blokk-diagonális, ami leegyszerűsíti a számolást: a determináns a főátlóban álló 2×2 blokkok determinánsainak szorzata és a sajátvektorokat is a külön-külön számolt (kétdimenziós) sajátvektorok 0-val való kiegészítésével kapjuk.

4. Számítsa ki a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ sor összegfüggvényét. Hol konvergens?

Megoldás. A mértani sor összegfüggvényéből indulhatunk ki:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

ha $|x| < 1$. Felhasználva, hogy a hatványsorokat tagonként lehet deriválni a konvergenciaintervallum belsejében, és a konvergenciasugár ettől nem változik:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{(1-x)^2} \\ &= x\frac{1(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Tehát $|x| < 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

A végpontokban a sor n. tagja n^2 illetve $(-1)^n n^2$, egyik sem tart nullához, tehát ott nem konvergens, így a konvergenciaintervallum $(-1, 1)$.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + (3yz^2 - xy^2)\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú 2 sugarú gömbfelület $z \geq 1$ egyenlőtlenséggel meghatározott darabján kifelé (vagyis a z tengely pozitív irányába) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = 2\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + 2\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + 2\cos\vartheta\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartományt a $0 \leq \vartheta \leq \pi/3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A normálvektor

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} &= (2\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + 2\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - 2\sin\vartheta\mathbf{k}) \times (-2\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + 2\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= 4\sin^2\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + 4\sin^2\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + 4\cos\vartheta\sin\vartheta\mathbf{k}, \end{aligned}$$

ez éppen felfelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = 8\sin^3\theta\cos^2\varphi\sin\varphi\mathbf{i} + (24\cos^2\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi - 8\sin^3\vartheta\cos\varphi\sin^2\varphi)\mathbf{j} - 8\cos^3\vartheta\mathbf{k}.$$

Az integrál tehát

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} \left(-32\cos^4\vartheta\sin\vartheta + 32\sin^5\vartheta\cos^3\varphi\sin\varphi + 96\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta\sin^2\varphi - 32\sin^5\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/3}\left(-32\cos^4\vartheta\sin\vartheta + 48\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/3}\left(-80\cos^4\vartheta\sin\vartheta + 48\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\left[16\cos^5\vartheta - 16\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/3} = 2\pi\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -3\pi, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi \\ \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A számolás egyszerűbb, ha észrevesszük, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = 2xy + 3z^2 - 2xy - 3z^2 = 0,$$

emiatt az integrál csak a felületdarab (irányított) peremétől függ. Eszerint ugyanazt az értéket kapjuk akkor is, ha például a $(0, 0, 1)$ középpontú, vízszintes síkú, $\sqrt{3}$ sugarú körlapon integrálunk felfelé mutató irányítás mellett. Mivel a normálvektor a z tengellyel párhuzamosan felfelé mutat, elég a vektormező utolsó komponensét tekinteni, ami ráadásul konstans. Ilyenkor az integrál a körlap területének és a vektormező harmadik komponensének szorzata, azaz $3\pi \cdot (-1) = -3\pi$.
Ugyanerre a következtetésre juthatunk számolással is. A körlap paraméterezése $\mathbf{r}(r, \phi) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + \mathbf{k}$, ahol $r \in [0, \sqrt{3}]$, $\phi \in [0, 2\pi]$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi)) = r^3 \cos^2 \phi \sin \phi \mathbf{i} + (3r \sin \phi - r^3 \cos \phi \sin^2 \phi)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

és a normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} = (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) \times (-r \sin \phi \mathbf{i} + r \cos \phi \mathbf{j}) = r\mathbf{k},$$

tehát a keresett integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(r, \phi)}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}(r, \phi)}{\partial \phi} \right) \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (-r) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = -2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} = -3\pi.
\end{aligned}$$

6. Oldja meg a $2xyy' - 1 + 2x + y^2 = 0$ differenciálegyenletet $y(-1) = -3$ kezdeti feltétel mellett.
Megoldás.

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y = \frac{\partial}{\partial y}(-1 + 2x + y^2),$$

tehát az egyenlet egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_0^x (-1 + 2\xi + 0^2) \, \mathrm{d}\xi + \int_0^y (2x\eta) \, \mathrm{d}\eta \\
&= \left[-\xi + \xi^2\right]_{\xi=0}^{\xi=x} + \left[x\eta^2\right]_{\eta=0}^{\eta=y} \\
&= -x + x^2 + xy^2.
\end{aligned}$$

Ennek alapján az általános megoldás implicit alakban $C = -x + x^2 + xy(x)^2$, explicit alakban

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{C}{x} + 1 - x}.$$

A kezdeti feltétel alapján a negatív előjelet kell tekinteni és $-3 = -\sqrt{-C + 1 + 1}$, tehát $C = -7$. A keresett így megoldás $y(x) = -\sqrt{-\frac{7}{x} + 1 - x}$.

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 4y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.
Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, tehát -2 kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $y'(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.
Az inhomogén tag polinom és exponenciális függvény szorzata, nincs külső rezonancia, az egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = (C_0 + C_1 x)e^{-x}$ alakban. Ennek deriváltajai

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (-C_0 + C_1)e^{-x} - C_1 xe^{-x} \\
y''(x) &= (C_0 - 2C_1)e^{-x} + C_1 xe^{-x},
\end{aligned}$$

az egyenletbe helyettesítve

$$(C_0 + 2C_1)e^{-x} + C_1 xe^{-x} = xe^{-x}$$

adódik, ami akkor teljesül minden x esetén, ha $C_0 + 2C_1 = 0$, $C_1 = 1$, tehát $C_0 = -2$. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = (-2 + x)e^{-x} + Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}.$$