

Matematika A3 szigorlat – 2018. február 8.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.
2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
5. Mit nevezünk abszolút konvergencia numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergencia, de nem abszolút konvergencia.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvényvel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{10x + x^3}{1 + x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$$

3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis?

4. Számítsa ki a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ sor összegfüggvényét. Hol konvergencia?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} + (3yz^2 - xy^2) \mathbf{j} - z^3 \mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú 2 sugarú gömbfelület $z \geq 1$ egyenlőtlenséggel meghatározott darabján kifelé (vagyis a z tengely pozitív irányába) mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg a $2xyy' - 1 + 2x + y^2 = 0$ differenciálegyenletet $y(-1) = -3$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 4y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.