Matematika A3 szigorlat – 2018. május 31.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke ∞.

   Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > K$.

3. Definiálja a Riemann-integrál fogalmát.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Az $a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq t_{x-1} \leq x_n = b$ osztópontokhoz tartozó integrálközelítő összeg $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$. Azt mondjuk, hogy f az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható és integrálja I, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, amivel az osztópontok bármely olyan válaszása esetén, ahol $\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}}(x_{i+1} - x_i) < \delta$ teljesül, az $\left| I - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right| < \epsilon$ egyenlőtlenség fennáll.

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Definiálja egy lineáris transzformáció sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. Az L sajátvektora $\mathbf{v}$ $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(v) = \lambda \cdot v$.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \arctan\left(n \ln n - \ln n!\right)$$
$$b_n = \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5}$$

Megoldás. A logaritmus tulajdonságai alapján $a_n = \arctan(\ln \frac{n^n}{n!})$, $n! \ll n^n$, tehát a hányados végtelenhez tart. $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ és $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5} \\ &= \left(1 + \frac{1-4n}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1-4n}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{\frac{2n^2-3n+9}{1-4n}}\right]^{\frac{(-3n+5)(1-4n)}{2n^2-3n+9}}. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelen belüli rész határértéke e, a külső kitevőé 6, tehát $\lim_{n\to\infty} b_n = e^6$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Először parciálisan integrálunk:

$$\int x \arcsin x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x,$$

majd $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel folytatjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin^2 t}{2} \,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos 2t}{4} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{8} = \frac{t}{4} - \frac{\sin t \cos t}{4} = \frac{\arcsin x}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}, \end{aligned}$$

tehát

$$\int x \arcsin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(-1 + 2x^2) \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

A Newton–Leibniz-formula alapján

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

sorösszeget.

Megoldás. Felhasználjuk, hogy $x \in (-2, 2)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}.$$

A hatványsort tagonként deriválhatjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}.$$

A kiszámítandó sort $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

4. Oldja meg az $XA = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Ha A invertálható, akkor X kifejezhető az egyenletből $X = BA^{-1}$ módon. Meghatározzuk az inverz mátrixot (ha létezik):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2+2s_1 \\ s_3+s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1+s_3 \\ s_2+s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3 \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A jobb oldalon álló 3×3 méretű blokk A^{-1}. Ezt felhasználva

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 5 \\ -3 & -5 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást $0 \le z \le 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A hengerpalást szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\phi, z) = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartományt a $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le z \le 1$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A normálvektor

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}(\phi, z)}{\partial\phi} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\phi, z)}{\partial z} &= (-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}) \times \mathbf{k} \\ &= \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}, \end{aligned}$$

ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\phi, z)) = \cos^3\phi\mathbf{i} + \sin^3\phi\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{r}(\phi, z)}{\partial\phi} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\phi, z)}{\partial z} \right) \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^4\phi + \sin^4\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{1 + \cos^2 2\phi}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos^2 2\phi}{2} \right)^2 \right) \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (3 + \cos 4\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

6. Oldja meg az $(1 + x^2)y'' = (1 - 2x)y'$ differenciálegyenletet $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenet az $u := y'$ változóra nézve elsőrendű, szétválasztható:

$$\frac{u'}{u} = \frac{1 - 2x}{1 + x^2},$$

integráljuk mindkét oldalt 0 és x között:

$$\ln u(x) - \ln u(0) = \int_0^x \frac{u'(\xi)}{u(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1-2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \big[\arctan\xi - \ln(1+\xi^2)\big]_{\xi=0}^{\xi=x} = \arctan x - \ln(1+x^2),$$

tehát

$$u(x) = \frac{2e^{\arctan x}}{1+x^2}.$$

Ebből a megoldást integrálással határozhatjuk meg:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 3 + 2\int_0^x \frac{e^{\arctan\xi}}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 1 + 2e^{\arctan x}.$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet lineáris állandó együtthatós inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 4\lambda + 5$, ennek gyökei $-2 \pm i$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$. Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C\cos x + D\sin x$ alakban. Ezt az egyenletbe helyettesítve

   $$(-C\cos x - D\sin x) + 4(-C\sin x + D\cos x) + 5(C\cos x + D\sin x) = \cos x$$

   adódik, amiből $4C + 4D = 1$ és $-4C + 4D = 0$, tehát $C = D = \frac{1}{8}$.
   Az inhomogén egyenlet általános megoldása

   $$y(x) = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x.$$