Matematika A3 szigorlat – 2018. május 31.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke ∞.
3. Definiálja a Riemann-integrál fogalmát.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja egy lineáris transzformáció sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:
$$a_n = \arctan\left(n \ln n - \ln n!\right)$$
$$b_n = \left(\frac{2n^2 - 7n + 10}{2n^2 - 3n + 9}\right)^{-3n+5}$$
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x \, \mathrm{d}x$$
3. Számítsa ki a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$
sorösszeget.
4. Oldja meg az $XA = B$ egyenletet, ha
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást $0 \le z \le 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg az $(1 + x^2)y'' = (1 - 2x)y'$ differenciálegyenletet $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.