Matematika A3 szigorlat – 2018. június 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

2. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

3. Definiálja egy $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b < 1$, és létezik a $\lim_{b\to 1-} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és 1 közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható

   Megoldás. pl. $\sqrt[3]{xy}$

7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?

   Megoldás. $\mathbf{v}$ potenciálos, ha létezik olyan f függvény, amivel $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ teljesül.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.

   Megoldás. Az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

   $$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

   rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

    $$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = (x-1)^6(x+1)^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Mivel f páratlan fokszámú polinom, $R_f = \mathbb{R}$. f zérushelyei ± 1, a határértékek:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

   A deriváltak

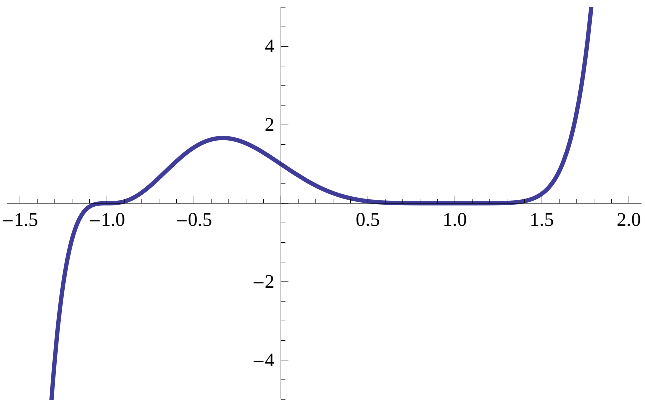
$$f'(x) = 6(x-1)^5(x+1)^3 + 3(x-1)^6(x+1)^2 = 3(1+3x)(x-1)^5(x+1)^2$$
$$f''(x) = 30(x-1)^4(x+1)^3 + 36(x-1)^5(x+1)^2 + 6(x-1)^6(x+1) = 24x(2+3x)(x-1)^4(x+1),$$

   tehát f' zérushelyei ± 1, $-\frac{1}{3}$, f'' zérushelyei pedig ± 1, 0 és $-\frac{2}{3}$. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-2/3)$	$-2/3$	$(-2/3,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	◜	infl	◞	infl	◜	max	◝	infl	◟	min	◞
f'	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f''	-	0	+	0	-	-	-	0	+	0	+

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

   tehát nincs ferde aszimptota.



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x \sin^3 x \, \mathrm{d}x$$

   Megoldás. Végezzünk parciális integrálást, a $\sin^3 x$ tényező primitív függvényét az $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$ azonosság segítségével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
\int x \sin^3 x \, \mathrm{d}x &= \int x(\sin x - \cos^2 x \sin x) \, \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x) - \int \left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x) - \int \left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin^2 x \cos x\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x) + \frac{1}{3}\int \left(2\cos x + \sin^2 x \cos x\right) \mathrm{d}x \\
&= x(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x) + \frac{1}{3}\left(2\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right) + C \\
&= x(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x) + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9}\sin^3 x + C.
\end{aligned}$$

3. A c valós paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= c \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_2 - 1x_3 &= -5 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Oldja is meg ezen érték mellett az egyenletet.

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt az egyenletrendszer kibővített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & c \\ 2 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1 \leftrightarrow s_4 \\ s_2 \leftrightarrow s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & -4 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 5 & c \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_3 - 2/3 s_1 \\ s_4 - s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -\frac{17}{3} & -\frac{22}{3} \\ 0 & -3 & 1 & -5+c \end{array}\right] \overset{\substack{s_3 + 4/3 s_2 \\ s_4 + s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -10+c \end{array}\right]$$

A kapott mátrix lépcsős alakban van. Az együtthatómátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja pedig 4 ha $c \neq 10$ és 3 ha $c = 10$. Tehát pontosan akkor létezik megoldás, ha $c = 10$.

Ha $c = 10$, akkor az alulról felfelé haladva leolvashatjuk a megoldást: $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = -1$.

4. Határozza meg az $f(x,y) = 4x^2 - 2x + y^2$ függvény maximumát és minimumát az $4x^2 + y^2 \leq 4$ egyenlőtlenség által meghatározott tartományon.

Megoldás. A függvény folytonosan differenciálható, lokális szélsőértékek előfordulhatnak a tartomány belsejében a gradiens zérushelyeinél vagy pedig a tartomány peremén.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 8x - 2 \\ f'_y(x,y) &= 2y, \end{aligned}$$

Az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldása $(x,y) = (\frac{1}{4}, 0)$, a függvényérték itt $f(\frac{1}{4}, 0) = -\frac{1}{4}$.

A megadott tartomány ellipszis, a perem egy paraméterezése $x(t) = \cos t$, $y(t) = 2\sin t$, ahol $t \in [0, 2\pi]$. A függvényérték a peremen

$$f(x(t), y(t)) = 4 - 2\cos t,$$

ennek maximumhelye $t = \pi$, minimumhelye $t = 0$. A perem megfelelő pontjai $(-1, 0)$ és $(1, 0)$, a függvényértékek $f(-1, 0) = 6$ és $f(1, 0) = 2$.

Tehát a maximum 6, a minimum $-\frac{1}{4}$.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = -y^3\mathbf{i} + 4x^3\mathbf{j}$ vektormezőt a $x^2 + (y/2)^2 = 1$, $z = 0$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. A megadott görbe ellipszis, egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ ($t \in [0, 2\pi]$). A derivált $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, a vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = -8\sin^3 t\mathbf{i} + 4\cos^3 t\mathbf{j}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-8\sin^3 t\mathbf{i} + 4\cos^3 t\mathbf{j}) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (8\cos^4 t + 8\sin^4 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (2(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) + 2(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 4\left(1 + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (6 + 2\cos 4t)\,\mathrm{d}t = 12\pi. \end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektormezőt azon téglatest kifelé irányított felületén, amelynek egyik csúcsa az origó, és az onnan kiinduló élvektorok $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

   Megoldás. Használhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, a kiszámítandó integrál megegyezik $\operatorname{div} u$ integráljával a téglatesten. Egy lehetséges paraméterezés $\mathbf{r}(u, v, w) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$ $(u, v, w \in [0, 1])$, a Jacobi-determináns

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| = |\mathbf{abc}| = |-6| = 6,$$

   a divergencia

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u(x, y, z) &= 2y - 2y + x = x \\ \operatorname{div} u(\mathbf{r}(u, v, w)) &= u + v - w. \end{aligned}$$

   Az integrál

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 6(u + v - w) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 3. \end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y''' + 2y'' + y' = 2x + 4e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet lineáris állandó együtthatós inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x}$. Az inhomogén tag polinomszor exponenciális tagok összege, az első tag miatt külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = (C_0 + C_1 x)x + De^x$ alakban. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_0 + 2C_1 x + De^x \\ y''(x) &= 2C_1 + De^x \\ y'''(x) &= De^x, \end{aligned}$$

   az egyenletbe helyettesítve

$$C_0 + 4C_1 + 2C_1 x + 4De^x = 2x + 4e^x$$

   adódik. Ebből $C_1 = 1$, $C_0 = -4$, $D = 1$, tehát az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = (-4 + x)x + e^x + A + Be^{-x} + Cxe^{-x}.$$