Matematika A3 szigorlat – 2018. június 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
2. Hogyan jellemezhető egy differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?
3. Definiálja egy $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható
7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció módszerét.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = (x-1)^6(x+1)^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x \sin^3 x \, \mathrm{d}x$$

3. A c valós paraméter mely értéke mellett létezik megoldása az

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= c \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_2 - 1x_3 &= -5 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Oldja is meg ezen érték mellett az egyenletet.

4. Határozza meg az $f(x, y) = 4x^2 - 2x + y^2$ függvény maximumát és minimumát az $4x^2 + y^2 \leq 4$ egyenlőtlenség által meghatározott tartományon.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y^3\mathbf{i} + 4x^3\mathbf{j}$ vektormezőt a $x^2 + (y/2)^2 = 1$, $z = 0$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektormezőt azon téglatest kifelé irányított felületén, amelynek egyik csúcsa az origó, és az onnan kiinduló élvektorok $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
7. Határozza meg az $y''' + 2y'' + y' = 2x + 4e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.