**Matematika A3 szigorlat** – 2018. június 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   *Megoldás.* Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   *Megoldás.* Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az $(a,b)$ intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   *Megoldás.* Ha $F$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható $(a,b)$-n, deriváltja ott $f$ és $f$ integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?

   *Megoldás.* $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, pontosan akkor konvegens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege $\frac{a}{1-q}$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   *Megoldás.* Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontban érinti.

   *Megoldás.* $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   *Megoldás.* $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   *Megoldás.* Legyen $S$ irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva $\partial S$, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább $S$ egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát. (azaz $f$ mikor rendelkezik a Lipschitz-tulajdonsággal?)

   *Megoldás.* Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \le L|x - x'|$.

10. Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát.

    *Megoldás.* Az egzakt differenciálegyenletek azok a $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú egyenletek, ahol $P = u'_x$ és $Q = u'_y$ valamely $u(x,y)$ kétváltozós függvényre. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n} - \sqrt{2n+9}}$$

$$b_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}$$

*Megoldás.* A nevező első tagja nullához tart, a második pedig nagyobb mint $7n$, tehát ez a tag nő gyorsabban. A nevezőben az első tagot alulról becsli $n^{\pi-\epsilon}$ bármely $\epsilon > 0$ mellett, ha $n$ elég nagy, a második pedig kisebb mint $4\sqrt{n}$, tehát az első tag nagyobb. Eszerint

$$a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n} - \sqrt{2n+9}} = \frac{n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n}} \frac{2^{-\sqrt{n}}n^{-2-\cos n} + 7}{1 - n^{-2\arctan n}\sqrt{2n+9}}.$$

A második tényező határértéke 7, az első pedig így becsülhető nagy $n$ esetén:

$$0 \le \frac{n^{2+\cos n}}{n^{2\arctan n}} \le \frac{n^3}{\pi - \epsilon} = n^{3-\pi+\epsilon}.$$

Ha $\epsilon$ elég kicsi, akkor $3 - \pi + \epsilon < 0$, tehát a jobb oldal nullához tart, így a rendőr-elv miatt $a_n$ határértéke is 0.

$$b_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2-n} = \left(\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}}\right)^{n^2-n} = \left(1-\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2-n}{2}} = \left[\left(1-\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{n^2-n}{2}\sin^2\frac{1}{n}}$$

A szögletes zárójelen belüli rész határértéke $e^{-1}$, a külső kitevő határértéke pedig

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2}\sin^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1/\sqrt{e}$.

2. Végezze el az $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

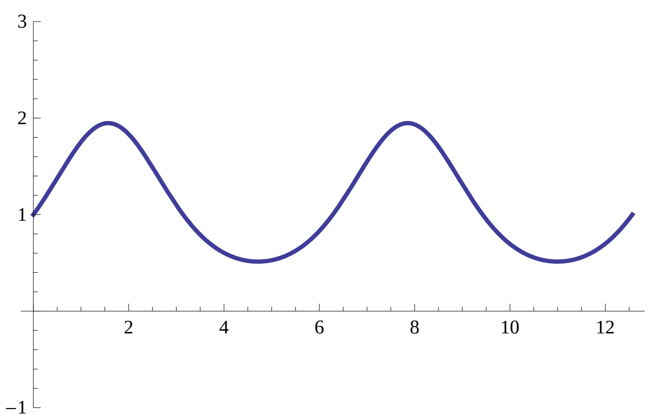
*Megoldás.* $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, $2\pi$ szerint periodikus, nem konstans, így nem létezik $\pm\infty$-ben sem határérték, sem aszimptota. sin értékkészlete $[-1, 1]$, $x \mapsto e^{\frac{2}{3}x}$ monoton és folytonos, tehát $R_f = [e^{-\frac{2}{3}}, e^{\frac{2}{3}}]$.
A deriváltak

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\sin x}\cos x$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}\sin x}\cos^2 x - \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\sin x}\sin x = -\frac{2}{9}e^{\frac{2}{3}\sin x}(2+\sin x)(-1+2\sin x),$$

tehát $f'$ zérushelyei $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $f''$ zérushelyei pedig $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ és $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

| | $\pi/6$ | $(\pi/6, \pi/2)$ | $\pi/2$ | $(\pi/2, 5\pi/6)$ | $5\pi/6$ | $(5\pi/6, 3\pi/2)$ | $3\pi/2$ | $(3\pi/2, 13\pi/6)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | infl | ╭ | max | ╮ | infl | ╰ | min | ╯ |
| $f'$ | + | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $f''$ | 0 | - | - | - | 0 | + | + | + |



3. Konvergens-e a
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$
sor?

*Megoldás.* Az $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ függvény monoton csökken, tehát az integrálkritérium alapján a sor pontosan konvergens, ha az
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$$
improprius integrál az.
$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} [\ln|\ln x|]_2^b \\ &= \lim_{b\to\infty} (\ln|\ln b| - \ln\ln 2) = \infty,\end{aligned}$$
tehát az integrál és így a sor is divergens.

4. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xye^{x^6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
*Megoldás.* Fubini tétele szerint a kétszeres integrál megegyezik a kétváltozós függvény integráljával az alábbi tartományon:
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\}.$$
Az utóbbi megadást felhasználva cseréljük fel az integrálokat:
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xye^{x^6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{x^2} xye^{x^6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xe^{x^6}\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 e^{x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}e^{x^6}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}(e-1).\end{aligned}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (2xy + yz - 2z^2)\mathbf{i} + (x^2 + xz)\mathbf{j} + (xy - 4xz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{9+t^2}\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} - \sqrt{4+3t}\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [0,4]$ darabján.

*Megoldás.* Az integrált közvetlenül is ki lehet számítani, de egyszerűbb, ha észrevesszük, hogy $\mathbf{u}$ potenciálos: mindenhol folytonosan differenciálható,
$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} &= 2x + z = \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial z} &= y - 4z = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial z} &= x = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial y}\end{aligned}$$
tehát létezik potenciálfüggvénye.

Egy potenciál
$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y x^2\,\mathrm{d}\eta - \int_0^z (xy - 4x\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= x^2y + \left[xy\zeta - 2x\zeta^2\right]_{\zeta=0}^{\zeta=z} = x^2y + xyz - 2xz^2.\end{aligned}$$
A görbementi integrálra vonatkozó Newton–Leibniz-formula alapján
$$\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(4)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(5,5,-4) - f(3,1,-2) = -135 - (-21) = -114.$$

6. Oldja meg az $(1+x^2)y' - xy = 1 + x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   *Megoldás.* Az egyenlet lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. Mivel az egyenlet elsőrendű, a homogén egyenlet szétválasztható:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\ln(1+x^2))',$$

   azaz

$$y(x) = C\sqrt{1+x^2}.$$

   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)\sqrt{1+x^2}$ alakban keressük. Behelyettesítve az

$$(1+x^2)c'(x)\sqrt{1+x^2} = 1 + x$$

   egyenlet adódik, amiből integrálással, $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t \, \mathrm{d}t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{1+x}{(1+x^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1+\sinh t}{(1+\sinh^2 t)^{3/2}} \cosh t \, \mathrm{d}t = \int \frac{1+\sinh t}{\cosh^2 t} \, \mathrm{d}t \\ &= \tanh t - \frac{1}{\cosh t} = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

   Az inhomogén egyenlet általános megoldása így $y(x) = x - 1 + C\sqrt{1+x^2}$, a kezdeti feltétel alapján $1 = y(0) = -1 + C$, tehát $C = 2$.

7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

   *Megoldás.* Az egyenlet megoldását

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   alakban keressük, a kezdeti feltétel alapján $1 = y(0) = a_0$ és $1 = y'(0) = a_1$. A behelyettesítés után kapott egyenlet

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

   Az egyenlet bal oldalát úgy alakítjuk át, hogy csak egy szumma szerepeljen:

$$\begin{aligned} &(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n n(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_n n + 2a_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(a_n - a_{n+2})x^n. \end{aligned}$$

   Az egyenlet jobb oldala 0, tehát a hatványsor minden együtthatójának el kell tűnnie, azaz $a_n = a_{n+2}$ minden $n \geq 0$ esetén. A kezdeti feltétel alapján tehát $a_n = 1$, vagyis a megoldás

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$