

Matematika A3 szigorlat – 2018. június 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Írja fel a geometriai (=mértnani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát. (azaz f mikor rendelkezik a Lipschitz-tulajdonsággal?)
10. Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \frac{2^{-\sqrt{n}} + 7n^{2+\cos n}}{n^{2 \arctan n} - \sqrt{2n+9}}$$

$$b_n = \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2 - n}$$

2. Végezze el az $f(x) = e^{\frac{2}{3} \sin x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

sor?

4. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy e^{x^6} dx dy$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy + yz - 2z^2)\mathbf{i} + (x^2 + xz)\mathbf{j} + (xy - 4xz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{9+t^2}\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} - \sqrt{4+3t}\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [0, 4]$ darabján.
6. Oldja meg az $(1+x^2)y' - xy = 1+x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.