Matematika A3 szigorlat – 2018. június 25.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

2. Mondja ki az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

   Megoldás. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ és létezik $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

5. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A_x(x - x_0) - A_y(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

7. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.

   Megoldás. pl. $\mathbf{u}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \\ b_n &= \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n} \end{aligned}$$

Megoldás.

$$a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} = \sqrt{1 + n^{-3/2}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}},$$

mindkét tényező határértéke 1, tehát $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n} \\ &= \frac{(n^2 + 3n - \cos n) - (n^2 - 7n + \sin n)}{\sqrt{n^2 + 3n - \cos n} + \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}} \\ &= \frac{10n - \cos n - \sin n}{\sqrt{n^2 + 3n - \cos n} + \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}} \\ &= \frac{10 - \frac{\cos n + \sin n}{n}}{\sqrt{1 + 3n^{-1} - n^{-2} \cos n} + \sqrt{1 - 7n^{-1} + n^{-2} \sin n}}, \end{aligned}$$

tehát $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 5$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^5 - x^3 - 2}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a számláló magasabb fokú, ezért elosztjuk a nevezővel: $x^5 - x^3 - 2 = x^3(x^2 - 1) - 2$. A nevező szorzattá alakítható: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. A maradék és a nevező hányadosát parciális törtekre bontjuk:

$$-\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1},$$

azaz

$$-2 = A(x + 1) + B(x - 1) = (A + B)x + (A - B).$$

Ennek alapján $A + B = 0$, $A - B = -2$, tehát $A = -B = -1$. Az integrál

$$\int \frac{x^5 - x^3 - 2}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x = \int \left(x^3 - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \ln |x - 1| + \ln |x + 1| + C.$$

3. Adja meg az $f(x) = e^x \cos x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát.

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ f''(x) &= -2e^x \sin x \\ f'''(x) &= -2e^x \cos x - 2e^x \sin x \\ f^{(4)}(x) &= -4e^x \cos x = -4f(x), \end{aligned}$$

tehát a deriváltak egy exponenciális szorzótól eltekintve periodikusan váltakoznak. Az $x_0 = 0$ pontban a helyettesítési értékek

$$\begin{aligned} f^{4k}(0) &= (-4)^k \\ f^{4k+1}(0) &= (-4)^k \\ f^{4k+2}(0) &= 0 \\ f^{4k+3}(0) &= -2(-4)^k, \end{aligned}$$

tehát a Taylor-sor

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k\left[\frac{x^{4k}}{(4k)!}+\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}-\frac{2x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right].$$

Mivel az exponenciális függvény és a koszinusz függvény hatványsorának is végtelen a konvergenciasugara, a szorzatuké is végtelen.

Megjegyzés. A Taylor-sor az alábbi alakban is felírható:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(1+i)^n+\frac{1}{2}(1-i)^n\right)\frac{1}{n!}x^n.$$

4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 5\\ -4 & -1 & 3\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

Megoldás. Ha A diagonalizálható, azaz felírható $A=SDS^{-1}$ alakban, ahol D diagonális, akkor $A^{100}=SD^{100}S^{-1}$ módon a legegyszerűbb a számolás, hiszen egy diagonális mátrix elemenként hatványozható. Ebben a felírásban D elemei a sajátértékek, S oszlopai pedig a sajátvektorok.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}-3-\lambda & -2 & 5\\ -4 & -1-\lambda & 3\\ -4 & -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & \lambda\\ -4 & -1-\lambda & 3\\ -4 & -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)((-1-\lambda)(5-\lambda)-3(-2))+\lambda(8-4(1+\lambda))\\ &=-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1=-(\lambda^2+1)(\lambda+1),\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek -1 és $\pm i$. Mivel minden sajátérték egyszeres, A diagonalizálható. $(-1)^4=i^4=(-i)^4=1$, tehát $D^{100}=(D^4)^{25}=I^{25}=I$, és így $A^{100}=I$.

5. Számítsa ki az $x^2+y^2=z^2$ egyenletű felület $x\geq z^2-z$ darabjának felszínét.

Megoldás. A megadott felület egy kúp darabja, a kúp szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(r,\phi)=r\cos\phi\mathbf{i}+r\sin\phi\mathbf{j}+r\mathbf{k}$, az egyenlőtlenség a paraméterekre nézve $r\cos\phi\geq r^2-r$, azaz $r((1+\cos\phi)-r)\geq 0$. Ennek megoldása $r\in[0,1+\cos\phi]$.

A normálvektor abszolútértéke

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial\phi}\right|=|(\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(-r\sin\phi\mathbf{i}+r\cos\phi\mathbf{j})|=|-r\cos\phi\mathbf{i}-r\sin\phi\mathbf{j}+\mathbf{k}|=\sqrt{2}r.$$

A felületdarab felszíne

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi}\sqrt{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos\phi)^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\phi+\cos^2\phi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

6. Határozza meg a $2e^y\cos x+e^y(\cos x+\sin x)y'=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet x-tól függő multiplikátorral egzakttá tehető:

$$\begin{aligned}\ln|M(x)|&=\int\frac{\frac{\partial e^y(\cos x+\sin x)}{\partial x}-\frac{\partial 2e^y\cos x}{\partial y}}{e^y(\cos x+\sin x)}\,\mathrm{d}x\\ &=\int\mathrm{d}x=x,\end{aligned}$$

tehát $M(x)=e^x$. Ezzel megszorozva az $2e^{x+y}\cos x+e^{x+y}(\cos x+\sin x)y'=0$ egzakt egyenlethez jutunk. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 2e^{\xi+0}\cos\xi\,\mathrm{d}\xi+\int_0^y e^{x+\eta}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}\eta\\ &=e^x(\cos x+\sin x)-1+e^x(\cos x+\sin x)(e^y-1)=e^{x+y}(\cos x+\sin x)-1.\end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x,y(x))=C$, ahol $C\in\mathbb{R}$ paraméter, ebből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x)=-x+\ln\frac{1+C}{\cos x+\sin x}=-x-\ln(\cos x+\sin x)+\tilde{C}.$$

7. Legyen $f(x) = \sin x$ ha $x \in [0, \pi]$ és $f(x) = 0$ ha $x \notin [0, \pi]$. Határozza meg az $f * f * f$ függvény Laplace-transzformáltját a definíció és a Laplace-transzformáció tulajdonságai alapján ($*$ a konvolúciót jelöli).

Megoldás. Mivel $\mathcal{L}(f * f * f) = (\mathcal{L}f)^3$, elég $f(x)$ Laplace-transzformáltját kiszámítani.

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{-zx} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

A primitív függvényt kétszeri parciális integrálással határozhatjuk meg.

$$\begin{aligned}\int e^{-zx} \sin x\,\mathrm{d}x &= e^{-zx}(-\cos x) - \int (-z)e^{-zx}(-\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-zx}(-\cos x) - (-z)e^{-zx}(-\sin x) + \int (-z)^2 e^{-zx}(-\sin x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ebből átrendezéssel

$$\int e^{-zx} \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{(\cos x + z\sin x)e^{-zx}}{1+z^2}.$$

Tehát

$$(\mathcal{L}f)(z) = \left[-\frac{(\cos x + z\sin x)e^{-zx}}{1+z^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1+e^{-\pi z}}{1+z^2},$$

és így

$$(\mathcal{L}(f * f * f))(z) = \left(\frac{1+e^{-\pi z}}{1+z^2}\right)^3.$$