Matematika A3 szigorlat – 2018. június 25.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Mondja ki az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó Bolzano-tételt.
3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.
5. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$$
$$b_n = \sqrt{n^2 + 3n - \cos n} - \sqrt{n^2 - 7n + \sin n}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^5 - x^3 - 2}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$$

3. Adja meg az $f(x) = e^x \cos x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát.
4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletű felület $x \geq z^2 - z$ darabjának felszínét.
6. Határozza meg a $2e^y \cos x + e^y(\cos x + \sin x)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Legyen $f(x) = \sin x$ ha $x \in [0, \pi]$ és $f(x) = 0$ ha $x \notin [0, \pi]$. Határozza meg az $f * f * f$ függvény Laplace-transzformáltját a definíció és a Laplace-transzformáció tulajdonságai alapján ($*$ a konvolúciót jelöli).