Matematika szigorlat G (A3) – 2018. szeptember 5.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a jobboldali határértéke $-\infty$.

   Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) < K$.

2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{3}\}$, páratlan függvény, nem periodikus. A határértékek

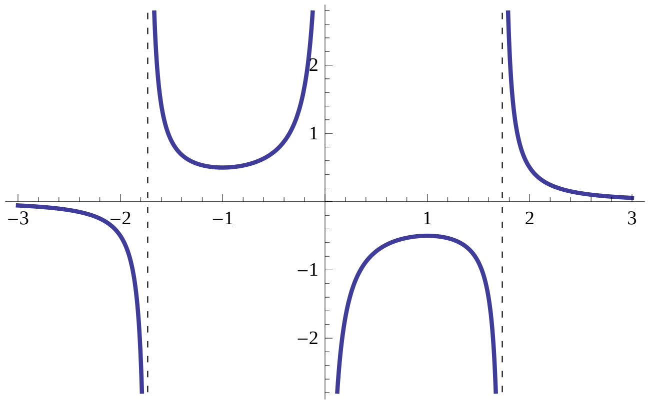
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} &= -\lim_{x\to-\infty} = 0\\
\lim_{x\to 0-} &= -\lim_{x\to 0-} = \infty\\
\lim_{x\to\sqrt{3}-} &= -\lim_{x\to-\sqrt{3}+} = -\infty\\
\lim_{x\to\sqrt{3}+} &= -\lim_{x\to-\sqrt{3}-} = \infty.
\end{aligned}$$

   A deriváltak

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3-3x^2}{(x^3-3x)^2}\\
f''(x) &= \frac{-6x(x^3-3x)^2 - (3-3x^2)\cdot 2(x^3-3x)(3x^2-3)}{(x^3-3x)^4} = \frac{6(3-3x^2+2x^4)}{(x^3-3x)^3},
\end{aligned}$$

   tehát f' zérushelyei ± 1, f'' pedig sehol sem 0, hiszen $z = x^2$ helyettesítéssel a számlálóban $3 - 3z + 2z^2$ áll, ennek diszkriminánsa negatív. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f	╮	X	╰	min	╯	X	╭	max	╮	X	╰
f'	-	X	-	0	+	X	+	0	-	X	-
f''	-	X	+	+	+	X	-	-	-	X	+



   $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1-2x}{2+4x+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a számláló foka kisebb mint a nevezőé, a nevezőnek nincs zérushelye, tehát teljes négyzetté alakítjuk: $2 + 4x + 4x^2 = (2x+1)^2 + 1$. A törtet bontsuk szét úgy, hogy az egyik tagban a számláló a nevező deriváltjának többszöröse legyen, a másikban pedig konstans:

$$\frac{1-2x}{2+4x+4x^2} = A\frac{4+8x}{2+4x+4x^2} + B\frac{1}{2+4x+4x^2} = \frac{4A+B+8Ax}{2+4x+4x^2},$$

   ami csak úgy teljesülhet minden x esetén, ha $1 = 4A + B$ és $-2 = 8A$, azaz $A = -\frac{1}{4}$ és $B = 2$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-2x}{2+4x+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{4}\frac{4+8x}{2+4x+4x^2} + 2\frac{1}{(2x+1)^2+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{4}\ln(2+4x+4x^2) + \arctan(2x+1) + C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + cx_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= c \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát a c valós paraméter függvényében.

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt az egyenletrendszer kibővített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & c & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6+c & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & c \end{array}\right] \overset{s_3-\frac{1}{2}s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6+c & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c}{2} & 0 & -\frac{1}{2}+c \end{array}\right]$$

A kapott lépcsős alakból az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is leolvasható: az előbbi 2 ha $c = 0$, egyébként 3, az utóbbi pedig mindig 3. Ha $c = 0$, akkor nem létezik megoldás. Mivel az ismeretlenek száma 4, $c \neq 0$ esetén végtelen sok megoldás van.

4. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$$

függvénysor konvergenciatartományát.

Megoldás. Használhatjuk a gyökkritériumot.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^x x^n|} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^x |x| = |x|,$$

mivel $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ebből következik, hogy a sor $|x| < 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén pedig divergens. Az $x = \pm 1$ pontokban kiértékelve a következő numerikus sorokat kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n,$$

ami divergens, illetve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

ami Leibniz-sor, tehát konvergens. A konvergenciatartomány $[-1, 1)$.

5. Határozza meg az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j}$ egyenletű síkgörbe $t \in [0, 2\pi]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának tömegközéppontját.

Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned} |\dot{r}(t)| &= \left|(e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{j}\right| \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} = \sqrt{2}e^t. \end{aligned}$$

A tömegközéppont koorinátái az elsőrendű nyomatékok elosztva az ívhosszal. A szükséges integrálok

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^t \cos t |\dot{r}(t)| \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} e^{2t} \cos t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{5}e^{2t}(2\cos t + \sin t)\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{5}(e^{4\pi} - 1) \\ \int_0^{2\pi} e^t \sin t |\dot{r}(t)| \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} e^{2t} \sin t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{5}e^{2t}(2\sin t - \cos t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{5}(1 - e^{4\pi}) \\ \int_0^{2\pi} |\dot{r}(t)| \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} e^t \, \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1, \end{aligned}$$

tehát a tömegközéppont helyvektora $\frac{2}{5}(1 + e^{2\pi})\mathbf{i} - \frac{1}{5}(1 + e^{2\pi})\mathbf{j}$.

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{i}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ felület $x \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$ darabján a z tengelytől távolódó irányba mutató irányítás szerint.

Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = \cosh u \cos v\mathbf{i} + \cosh u \sin v\mathbf{j} + \sinh u\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartomány $[0, \operatorname{arsinh} 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$. A kifelé mutató normálvektor

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} &= -(\sinh u \cos v\mathbf{i} + \sinh u \sin v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}) \times (-\cosh u \sin v\mathbf{i} + \cosh u \cos v\mathbf{j}) \\
&= \cosh^2 u \cos v\mathbf{i} + \cosh^2 u \sin v\mathbf{j} - \sinh u \cosh u\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

A vektormező értéke a felületen $\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbf{i}$, az integrál tehát

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cosh^2 u \cos v \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1 + \cosh 2u}{2} \,\mathrm{d}u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \,\mathrm{d}v \\
&= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \arcsin 1 + \frac{\sinh 2 \operatorname{arsinh} 1}{2} = \sqrt{2} + \arcsin 1.
\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 5y' + 6y = xe^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Be^{-3x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van. Az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = x(C_0 + C_1 x)e^{-2x}$ alakban keressük. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (C_0 - 2C_0 x + 2C_1 x - 2C_1 x^2)e^{-2x} \\
y''(x) &= (-4C_0 + 2C_1 + 4C_0 x - 8C_1 x + 4C_1 x^2)e^{-2x},
\end{aligned}$$

   a behelyettesítés után kapott egyenlet

$$(C_0 + 2C_1)e^{-2x} + 2C_1 xe^{-2x} = xe^{-2x},$$

   amiből $C_0 + 2C_1 = 0$ és $2C_1 = 1$, tehát $C_1 = \frac{1}{2}$ és $C_0 = -1$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -xe^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{-3x}.$$