Matematika szigorlat G (A3) – 2018. szeptember 5.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a jobboldali határértéke $-\infty$.
2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int \frac{1-2x}{2+4x+4x^2}\,\mathrm{d}x$$
3. Határozza meg az
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + cx_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= c \end{aligned}$$
egyenletrendszer megoldásszámát a c valós paraméter függvényében.
4. Határozza meg a
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$$
függvénysor konvergenciatartományát.
5. Határozza meg az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j}$ egyenletű síkgörbe $t \in [0, 2\pi]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának tömegközéppontját.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{i}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ felület $x \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$ darabján a z tengelytől távolódó irányba mutató irányítás szerint.
7. Határozza meg az $y'' + 5y' + 6y = xe^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.