Matematika szigorlat G (A3) – 2018. december 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

3. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

7. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja U, és $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a))$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, ahol $a_0, \ldots, a_n, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = n\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$$
$$b_n = \left(1-\frac{1}{n^2+n}\right)^{2n^2-n}$$

Megoldás. Az első határértéket $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ segítségével lehet kiszámítani:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\sqrt{1-\cos^2\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\cos\frac{1}{n}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\cos\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A második határérték

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+n}\right)^{2n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}\right]^{\frac{2n^2-n}{n^2+n}} = \frac{1}{e^2},$$

mivel a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke e^{-1}, a külső kitevőé 2.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3x^2+12x+13}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3x^2+12x+13}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{a\to-\infty}\Big[\arctan(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})\Big]_a^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\Big[\arctan(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})\Big]_0^b\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan 2\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(-\pi/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\pi/2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan 2\sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3. Adja meg az $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ függvény $x_0 = 1$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát.

Megoldás. A függvényt először parciális törtekre bontjuk:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)},$$

tehát $A = 1$, $B = -1$. Mindkét tag mértani sor összegeként áll elő:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+(x-1))} - \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-2^{-(n+1)}\right)(x-1)^n.\end{aligned}$$

A konvergencia feltétele $|-(x-1)| < 1$ és $|-\frac{x-1}{2}| < 1$, az előbbi erősebb, tehát a konvergenciasugár 1.

4. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{y}{4}$ függvény minimumát és maximumát a $0 \le y \le 1 - 2x^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományon.

Megoldás. A függvény differenciálható, szélsőérték lehet a tartomány belsejében a gradiens zérushelyeinél, vagy pedig a peremen. A parciális deriváltak

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + \frac{1}{4},$$

egy közös zérushely van, $(-1/4, 1/2)$, ami valóban a tartomány belsejében van, itt $f(-1/4, 1/2) = 1/16$. A perem két differenciálható görbedarabból áll, ezeken a függvény $f(x, 0) = x^2$ ($x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$) illetve

$$f(x, 1 - 2x^2) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

ugyanezen az intervallumon. Az előbbi minimuma 0, maximuma 1/2 (a két végpontnál), az utóbbi deriváltja $-6x^2 + x + 1 = -(2x - 1)(3x + 1)$, tehát a zérushelyek $-1/3$ és $1/2$. Mindkettő az intervallum belsejében van, a függvényértékek itt $f(-1/3, 7/9) = \frac{5}{108}$ és $f(1/2, 1/2) = \frac{5}{8}$. Tehát a tartományon a minimum 0, a maximum pedig $\frac{5}{8}$.

Megjegyzés. A $(-1/4, 1/2)$ pont a függvényérték kiszámolása nélkül is kizárható: a Hesse mátrix

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ami indefinit (determinánsa -1), tehát itt nyeregpont van.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y^2z\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ vektormezőt a $4x^2 + y^2 = 4$, $2x + z = 7$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. A görbe egy elliptikus henger palástjának és egy síknak a metszésvonala. Az első egyenlet alapján a $z = 0$ síkra vett vetületet paraméterezhetjük $(\cos t, 2\sin t)$ módon, a másodikból pedig kifejezhetjük a harmadik koordinátát. A görbe így kapott paraméterezése $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + (7 - 2\cos t)\mathbf{k}$ ($t \in [0, 2\pi]$), deriváltja $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 2\sin t\mathbf{k}$.
Az integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-4(7 - 2\cos t)\sin^2 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j} + 4\cos t \sin^2 t\mathbf{k}) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 2\sin t\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos^4 t + 28\sin^3 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 + 28\sin t - 28\cos^2 t \sin t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos 2t + \frac{1}{2}\cos^2(2t) + 28\sin t - 28\cos^2 t \sin t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \cos 2t + \frac{1}{4}\cos(4t) + 28\sin t - 28\cos^2 t \sin t\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{16}\sin(4t) - 28\cos t + \frac{28}{3}\cos^3 t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6. Hol van a tömegközéppontja az $\mathbf{r}(u, v) = uv\mathbf{i} + u^2v\mathbf{j} + \frac{1-v}{2}\mathbf{k}$ paraméterezett felület $(u, v) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ darabjának?

Megoldás.

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \left|(v\mathbf{i} + 2uv\mathbf{j}) \times (u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k})\right| = \left|-uv\mathbf{i} + \frac{v}{2}\mathbf{j} - u^2v\mathbf{k}\right| = \sqrt{u^2v^2 + u^4v^2 + \frac{v^2}{4}} = \frac{v}{2} + u^2v$$

A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a felszín hányadosai. A szükséges integrálok

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{v}{2} + u^2 v\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{5v}{3} \, \mathrm{d}v = \frac{5}{6} \\
\int_0^1 \int_{-1}^1 uv \left(\frac{v}{2} + u^2 v\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v &= 0 \\
\int_0^1 \int_{-1}^1 u^2 v \left(\frac{v}{2} + u^2 v\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{11v^2}{15} \, \mathrm{d}v = \frac{11}{45} \\
\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1-v}{2} \left(\frac{v}{2} + u^2 v\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{5}{6}(v - v^2) \, \mathrm{d}v = \frac{5}{36},
\end{aligned}$$

A tömegközéppont helye $\frac{22}{75}\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k}$.

7. Határozza meg az $y'' - 9y = xe^{-3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet másodrendű inhomogén lineáris állandó együtthatós, a hozzá tartozó homogén egyenlet $y'' - 9y = 0$, ennek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$. Eszerint a gyökök $\lambda = \pm 3$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-3x} + Be^{3x}$.
Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1 x)xe^{-3x}$ alakban keressük. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (C_0 - 3C_0 x + 2C_1 x - 3C_1 x^2)e^{-3x} \\
y''(x) &= (-6C_0 + 2C_1 + 9C_0 x - 12C_1 x + 9C_1 x^2)e^{-3x},
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$(-6C_0 + 2C_1 - 12C_1 x)e^{-3x} = xe^{-3x}$$

adódik, amiből $C_1 = -\frac{1}{12}$, $C_0 = -\frac{1}{36}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{36}xe^{-3x} - \frac{1}{12}x^2 e^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x}.$$