Matematika szigorlat G (A3) – 2018. december 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a+bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a<0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.
7. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = n\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$$

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n^2+n}\right)^{2n^2-n}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3x^2+12x+13}\,\mathrm{d}x$$

3. Adja meg az $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ függvény $x_0 = 1$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát.
4. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{y}{4}$ függvény minimumát és maximumát a $0 \le y \le 1 - 2x^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományon.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = -y^2z\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ vektormezőt a $4x^2 + y^2 = 4$, $2x + z = 7$ egyenletrendszerű görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.
6. Hol van a tömegközéppontja az $\mathbf{r}(u,v) = uv\mathbf{i} + u^2v\mathbf{j} + \frac{1-v}{2}\mathbf{k}$ paraméterezett felület $(u,v) \in [-1,1] \times [0,1]$ darabjának?
7. Határozza meg az $y'' - 9y = xe^{-3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.