Matematika szigorlat G (A3) – 2018. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Hogyan jellemezhető egy egyszer differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

3. Definiálja egy $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b < 1$, és létezik a $\lim_{b\to 1-}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és 1 közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Írja fel egy közönséges, elsőrendű, lineáris, inhomogén kezdetiérték-probléma általános alakját.

   Megoldás. $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, $y(x_0) = y_0$, ahol $a_0, a_1, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ adott számok.

10. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.

    Megoldás. Az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

    $$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

    rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$$
$$b_n = \frac{(7+\sin n)^n + n^{21} - 9 \cdot 5^n}{17n^9 + 78\sqrt{n} - 5^n}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln n) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(7+\sin n)^n + n^{21} - 9\cdot 5^n}{17n^9 + 78\sqrt{n} - 5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7+\sin n}{5}\right)^n \frac{1 + \frac{n^{21}}{(7+\sin n)^n} - \frac{9\cdot 5^n}{(7+\sin n)^n}}{\frac{17n^9}{5^n} + \frac{78\sqrt{n}}{5^n} - 1}.$$

$7 + \sin n \geq 6$ miatt az első tényező legalább $\left(\frac{6}{5}\right)^n$, ami végtelenhez tart, ugyanezen becslést felhasználva a második tényező határértéke -1. A szorzat határértéke így $-\infty$.

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. A nevező $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, nincs zérushely. f páratlan, nem periodikus. A határértékek

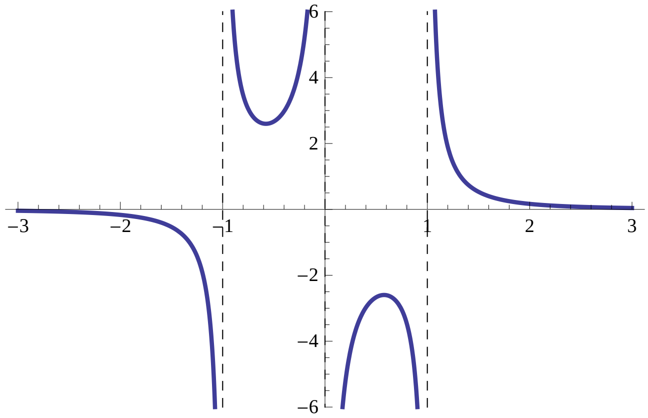
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = -\lim_{x\to -1-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty,$$

tehát $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A deriváltak

$$f'(x) = \frac{1-3x^2}{(x^3-x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-6x(x^3-x)^2 - (1-3x^2)\cdot 2(x^3-x)(3x^2-1)}{(x^3-x)^4} = \frac{2(6x^4-3x^2+1)}{(x^3-x)^3},$$

f' zérushelyei $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, f'' sehol sem 0. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)$	0	$(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$	1	$(1,\infty)$
f	╮	X	╰	min	╯	X	╭	max	╮	X	╰
f'	-	X	-	0	+	X	+	0	-	X	-
f''	-	X	+	+	+	X	-	-	-	X	+



3. Határozza meg az alábbi sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n) x^n$$

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sinh n} = \lim_{n\to\infty} e \sqrt[n]{\frac{1-e^{-2n}}{2}} = e,$$

tehát a konvergenciasugár $R = \frac{1}{e}$. A végpontokon az n indexű tag

$$\left|(\sinh n)\left(\pm\frac{1}{e}\right)^n\right| = \frac{e^n - e^{-n}}{2} e^{-n} = \frac{1-e^{-2n}}{2},$$

ami nem tart nullához, így itt nem konvergens, a konvergenciatartomány $(-1/e, 1/e)$. Az összeg a mértani sor összegének felhasználásával számolható:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (ex)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ex} - \frac{1}{2}\frac{e}{e-x}.$$

4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ -8 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Ha A diagonalizálható, azaz felírható $A = SDS^{-1}$ alakban, ahol D diagonális, akkor $A^{100} = SD^{100}S^{-1}$ módon a legegyszerűbb a számolás, hiszen egy diagonális mátrix elemenként hatványozható. Ebben a felírásban D elemei a sajátértékek, S oszlopai pedig a sajátvektorok.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 5 & -6-\lambda & -3 \\ -8 & 11 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 5 & -3-\lambda & -3 \\ -8 & 5+\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda((-3-\lambda)(6-\lambda) + 3(5+\lambda)) + (5(5+\lambda) - 8(3+\lambda)) = 1 - \lambda^3,\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek a harmadik egységgyökök, 1 és $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mivel három különböző sajátérték van, a mátrix diagonalizálható. Eszerint $D^{100} = (D^3)^{33} D = D$, tehát $A^{100} = A$.

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x,y,z) = \dfrac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1+x^2}\mathbf{j} - \dfrac{1+2z^2}{\sqrt{1+z^2}}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező mindenhol folytonosan differenciálható,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial y},\end{aligned}$$

tehát létezik potenciálfüggvény.
Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\eta - \int_0^z \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= [\operatorname{arsinh}\xi]_{\xi=0}^{\xi=x} + y\sqrt{1+x^2} - \int_0^z \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

Az utolsó integrált $\sinh t = \zeta$, $\cosh t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\zeta$ helyettesítéssel számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta &= \int \frac{1+2\sinh^2 t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int (1+2\sinh^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \cosh 2t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\sinh 2t = \sinh t\cosh t = \zeta\sqrt{1+\zeta^2} + C.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$f(x,y,z) = \operatorname{arsinh} x + y\sqrt{1+x^2} - z\sqrt{1+z^2}.$$

6. Oldja meg az $y' = -2x\sqrt{1+y^2}$ differenciálegyenletet $y(3) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet szétválasztható,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = -2x$$

   mindkét oldalát integráljuk:

$$\int_3^x \frac{y'(\xi)}{\sqrt{1+y(\xi)^2}}\,\mathrm{d}\xi = \int_3^x -2\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

   azaz $\operatorname{arsinh} y(x) - \operatorname{arsinh} y(3) = 9 - x^2$, amiből $y(x) = \sinh(9 - x^2)$.

7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet megoldását

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   alakban keressük, a kezdeti feltétel alapján $0 = y(0) = a_0$ és $1 = y'(0) = a_1$. A behelyettesítés után kapott egyenlet

$$(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

   Az egyenlet bal oldalát úgy alakítjuk át, hogy csak egy szumma szerepeljen:

$$\begin{aligned}
&(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)n - a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n x^n + a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

   Az egyenlet jobb oldala 0, tehát a hatványsor minden együtthatójának el kell tűnnie, azaz

$$a_{n+2} = \frac{(1-n)a_n + n(n+1)a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}.$$

   A kezdeti feltételből $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a rekurzió miatt $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, innentől pedig minden tag 0, hiszen a_{n+2} az a_n és a_{n+1} lineáris kombinációja. Tehát a keresett megoldás $y(x) = x$.