Matematika szigorlat G (A3) – 2018. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Hogyan jellemezhető egy egyszer differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?
3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Írja fel egy közönséges, elsőrendű, lineáris, inhomogén kezdetiérték-probléma általános alakját.
10. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$$
$$b_n = \frac{(7+\sin n)^n + n^{21} - 9 \cdot 5^n}{17n^9 + 78\sqrt{n} - 5^n}$$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az alábbi sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n) x^n$$

4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ -8 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x,y,z) = \dfrac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1+x^2}\mathbf{j} - \dfrac{1+2z^2}{\sqrt{1+z^2}}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.
6. Oldja meg az $y' = -2x\sqrt{1+y^2}$ differenciálegyenletet $y(3) = 0$ kezdeti feltétel mellett.
7. Sorfejtés segítségével határozza meg az $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.