Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1+\sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

2. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?

   Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát, és adjon példát a $[0,1]$ intervallumon konvergens, de ott nem egyenletesen konvergens függvénysorra.

   Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$.

5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. Az L sajátvektora $\mathbf{v}$ $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(v) = \lambda \cdot v$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x,y)$ differenciálható az (x_0,y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_x(x-x_0) - A_y(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

7. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.

   Megoldás. pl. $\mathbf{u}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Definiálja az $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

   Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x + 2\arctan\dfrac{1}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye, mivel a két tag előjele egyforma, egyik sem 0 sehol. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to0+} f(x) = -\lim_{x\to0-} f(x) = \pi.$$

   A deriváltak

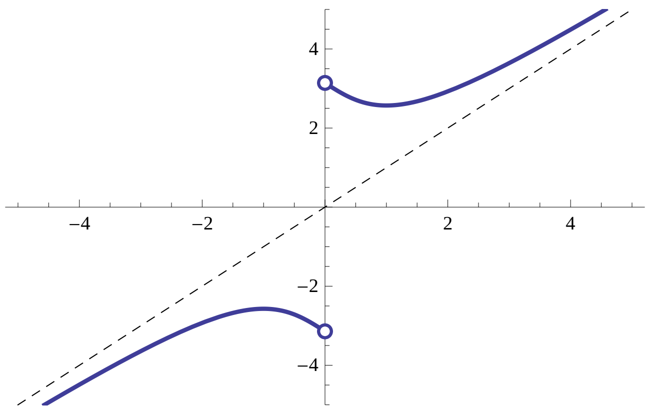
$$f'(x) = 1 + 2\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$
$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

   f' zérushelyei $x = \pm1$, itt $f(1) = -f(-1) = 1 + \frac{\pi}{2}$, a második deriváltnak nincs zérushelye ($0 \notin D_f$ miatt!). Az előjelek:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	◜	max	◝	X	◟	min	◞
f'	+	0	-	X	-	0	+
f''	-	-	-	X	+	+	+

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{2\arctan\frac{1}{x}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} 2\arctan\frac{1}{x} = 0,$$

   tehát van ferde aszimptota, az egyenlete $y = x$ (mindkét irányban).



   $R_f = (-\infty, -1-\frac{\pi}{2}] \cup [1+\frac{\pi}{2}, \infty)$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. $e^x = t$, $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel az integrál

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t,$$

   az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{t+1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)},$$

   a számlálóban lévő polinomok összevetéséből $A+B=0$, $C=1$, $A=1$, tehát $B=-1$ adódik. Az integrál tehát

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \ln|t| + \arctan t - \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + C = x + \arctan e^x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.$$

3. Konvergens-e a sor? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+\sqrt{n}}{2n^4-3n}$$

Megoldás. A majoránskritériumot alkalmazhatjuk. Ha $n \geq 0$, akkor $\sqrt{n} \leq n$, ha pedig $n \geq 2$, akkor $n^4 \geq 3n$, tehát az első tag kivételével az alábbi felső becslés érvényes:

$$\left|(-1)^n\frac{n^2+\sqrt{n}}{2n^4-3n}\right| \leq \frac{2n^2}{2n^4-3n} \leq \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}.$$

Mivel $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ konvergens, a megadott sor abszolút konvergens és így konvergens is.

4. Oldja meg az $AX = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -11 \\ -6 & 0 & -1 & -31 \\ -4 & 2 & 0 & -23 \\ -2 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A megoldás $X = A^{-1}B$, a kiszámításhoz meghatározhatjuk A inverzét Gauss-eliminációval.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-2s_1\\ s_3-3s_1\\ s_4+2s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1\cdot(-1)\\ s_3-s_2\\ s_4+2s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_4+2s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1+s_4\\ s_2-s_4\\ s_3+2s_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{s_4\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

A jobb oldali blokk A^{-1}, tehát

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -11 \\ -6 & 0 & -1 & -31 \\ -4 & 2 & 0 & -23 \\ -2 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (y^2+yz)\mathbf{i} + (2xy+z^2)\mathbf{j} + (xy+yz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ zárt töröttvonalon, ha $A = (0,0,0)$, $B = (1,2,0)$, $C = (1,1,2)$, $D = (0,-1,2)$.

Megoldás. Az integrált közvetlenül is ki lehet számítani, de egyszerűbb a Stokes-tétellel. Mivel az AB és DC szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, a töröttvonal egy paralelogramma pereme. Jelölje S a paralelogrammát olyan irányítással, hogy a jobbkéz-szabály szerint irányított pereme épp $ABCD$ legyen. S egy paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + (2u-v)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$ $(u,v \in [0,1])$, az irányításnak megfelelő normálvektor

$$\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v} = (\mathbf{i}+2\mathbf{j}) \times (-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (x-z)\mathbf{i} - z\mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^1\int_0^1 (\operatorname{rot}\mathbf{u})(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right) du\, dv$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (4u-6v)\, du\, dv = 2 - 3 = -1.$$

6. Határozza meg a $2x\sqrt{1+x^2}-1+xy+(1+x^2)y'=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás.

$$\frac{\partial(2x\sqrt{1+x^2}-1+xy)}{\partial y}=x\neq 2x=\frac{\partial(1+x^2)}{\partial x}$$

tehát az egyenlet nem egzakt, de létezik csak y-tól függő multiplikátor:

$$\ln|M(x)|=\int\frac{x-2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Az egyenletet szorozzuk meg az $M(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ függvénnyel, így már egzakt:

$$2x+\frac{xy-1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}y'=0,$$

egy potenciál

$$u(x,y)=\int_0^x\left(2\xi-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\mathrm{d}\xi+\int_0^y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\eta=x^2-\operatorname{arsinh}x+\sqrt{1+x^2}y,$$

tehát az általános megoldás $u(x,y(x))=C$ alapján

$$y(x)=\frac{C-x^2+\operatorname{arsinh}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7. Oldja meg az $y''-y'-6y=xe^x$ differenciálegyenletet $y(0)=y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet lineáris állandó együtthatós inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x)=Ae^{3x}+Be^{-2x}$. Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x)=(C_0+C_1x)e^x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x)&=(C_0+C_1)e^x+C_1xe^x\\y''(x)&=(C_0+2C_1)e^x+C_1xe^x,\end{aligned}$$

behelyettesítve a kapott egyenlet

$$(C_0+2C_1)e^x+C_1xe^x-(C_0+C_1)e^x-C_1xe^x-6(C_0+C_1x)e^x=xe^x,$$

azaz $(-6C_0+C_1)e^x-6C_1xe^x=xe^x$, amiből $C_1=-\frac{1}{6}$, $C_0=-\frac{1}{36}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és annak deriváltja

$$\begin{aligned}y(x)&=-\frac{1}{36}e^x-\frac{1}{6}xe^x+Ae^{3x}+Be^{-2x}\\y'(x)&=-\frac{7}{36}e^x-\frac{1}{6}xe^x+3Ae^{3x}-2Be^{-2x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0=y(0)&=-\frac{1}{36}+A+B\\0=y'(0)&=-\frac{7}{36}+3A-2B,\end{aligned}$$

amiből $A=\frac{1}{20}$, $B=-\frac{1}{45}$. Tehát a keresett megoldás

$$-\frac{1}{36}e^x-\frac{1}{6}xe^x+\frac{1}{20}e^{3x}-\frac{1}{45}e^{-2x}.$$