Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1 + \sqrt{3}i$ számot.
2. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát, és adjon példát a $[0, 1]$ intervallumon konvergens, de ott nem egyenletesen konvergens függvénysorra.
5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x + 2 \arctan \dfrac{1}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} \, \mathrm{d}x$$

3. Konvergens-e a sor? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sqrt{n}}{2n^4 - 3n}$$

4. Oldja meg az $AX = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -11 \\ -6 & 0 & -1 & -31 \\ -4 & 2 & 0 & -23 \\ -2 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y^2 + yz)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (xy + yz)\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ zárt töröttvonalon, ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (1, 1, 2)$, $D = (0, -1, 2)$.
6. Határozza meg a $2x\sqrt{1 + x^2} - 1 + xy + (1 + x^2)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Oldja meg az $y'' - y' - 6y = xe^x$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.