Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$.

2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

   Megoldás. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ és létezik $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható

   Megoldás. pl. $\sqrt[3]{xy}$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye. A határértékek:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{x^2+3}{x-1} = \pm\infty.$$

   A deriváltak

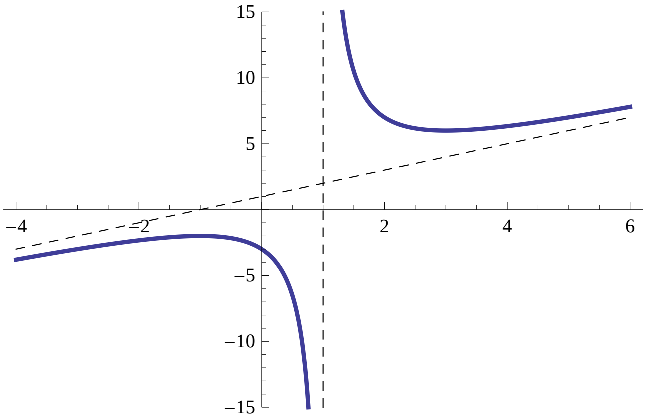
$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3},$$

   tehát f' zérushelyei -1 és 3, f'' sehol nem 0. $f(-1) = -2$, $f(3) = 6$ Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
f	◜	max	◝	X	◟	min	◞
f'	+	0	-	X	-	0	+
f''	-	-	-	X	+	+	+

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1,$$

   tehát van ferde aszimptota, az egyenlete $y = x+1$ (mindkét irányban).



$R_f = (-\infty,-2] \cup [6,\infty)$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^4-15x^2+49}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a számláló foka magasabb mint a nevezőé, tehát először leválasztjuk a polinom részt (polinomosztással):

$$x^4-15x^2+49 = x^2-x-8+\frac{2x+1}{x^2+x-6}.$$

   A nevező $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$, a törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{(x+3)(x-2)},$$

   amiből $A+B = 2$, $-2A+3B = 1$, tehát $A = B = 1$. Az integrál

$$\int \frac{x^4-15x^2+49}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2-x-8+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 8x + \ln|x+3| + \ln|x-2| + C.$$

3. Határozza meg a hatványsor konvergenciatartományát.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \binom{2n}{n} x^n$$

Megoldás. Először a konvergenciasugarat határozzuk meg a Cauchy–Hadamard-tétel hányadoskritériumon alapuló változata segítségével:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{(n+1)^2}\binom{2(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(2n)!(n+1)!^2}{n^2(2n+2)!n!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^2(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

A végpontok vizsgálatához használjuk a $\binom{2n}{n} \le 2^{2n}$ becslést. Ezzel

$$\left|\frac{1}{n^2}\binom{2n}{n}\left(\pm\frac{1}{4}\right)^n\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

a hatványsor a $\pm 1/4$ pontokban is abszolút konvergens. Tehát a konvergenciaintervallum $[-1/4, 1/4]$.

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A sajátértékek $\det(A - \lambda I)$ gyökei, a determináns

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & 0 & 9 \\ -2 & -\lambda & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1-\lambda & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & 9 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ -4 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & 9 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 0 & -2+2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(7-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) - 3(2-2\lambda)) - (1-\lambda)(-2)(3(1-\lambda) - 9(-2+2\lambda)) \\
&= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda) = \lambda(\lambda-1)^3,
\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és 1.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1+3s_2 \\ s_3+2s_2 \\ s_4-2s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2+2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3-s_2/3 \\ s_4+s_2/3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} s & -2s-3u & t & u \end{bmatrix}^T$, ahol $s, t, u \in \mathbb{C}$.
Minden sajátértékhez találtunk az algebrai multiplicitással megegyező számú lineárisan független sajátvektort, tehát létezik sajátvektorokból álló bázis.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelület $z \ge 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)=\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartományt a $0\le\vartheta\le\pi/2$, $0\le\varphi\le 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A normálvektor

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}&=(\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}-\sin\vartheta\mathbf{k})\times(-\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i}+\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j})\\&=\sin^2\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin^2\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\vartheta\sin\vartheta\mathbf{k},\end{aligned}$$

ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))=\sin\vartheta(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathbf{i}+\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}+\cos^2\vartheta\mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned}\iint_S\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos^3\vartheta\sin\vartheta+\sin^3\vartheta\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\pi\int_0^{\pi/2}(2\cos^3\vartheta\sin\vartheta+\sin\vartheta-\cos^2\vartheta\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\pi\left[-\frac{\cos^4\vartheta}{2}-\cos\vartheta+\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/2}=\pi\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}\pi.\end{aligned}$$

6. Oldja meg az $y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletet $y(1)=e$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. $u=\frac{y}{x}$ helyettesítést alkalmazunk,

$$u'=\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{u\,(1+\ln u)-u}{x}=\frac{u\ln u}{x},$$

   az így kapott egyenlet szétválasztható:

$$\frac{u'}{u\ln u}=\frac{1}{x}.$$

   Integráljuk mindkét oldalt:

$$\ln\ln u(x)-\ln\ln u(1)=\int_1^x\frac{u'(\xi)}{u(\xi)\ln u(\xi)}\,\mathrm{d}\xi=\int_1^x\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi=\ln x$$

   ha $x>0$. Tehát $y(x)=xu(x)=xe^x$.

7. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az $y''-y=5040x^6-x^{10}$ differenciálegyenletet $y(0)=1$, $y'(0)=1$ kezdeti feltétel mellett ($5040=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$).

   Megoldás. Legyen $Y=\mathcal{L}y$ az y Laplace-transzformáltja, ekkor

$$(\mathcal{L}y'')(z)=z^2Y(z)-zy(0)-y'(0)=z^2Y(z)-z-1.$$

   Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$z^2Y(z)-z-1-Y(z)=5040\frac{6!}{z^7}-\frac{10!}{z^{11}},$$

   azaz

$$Y(z)=\frac{10!}{z^{11}}\frac{z^4-1}{z^2-1}+\frac{z+1}{z^2-1}=\frac{10!}{z^{11}}(z^2+1)+\frac{1}{z-1}=90\frac{8!}{z^9}+\frac{10!}{z^{11}}+\frac{1}{z-1}.$$

   A megoldás ennek inverz Laplace-transzformáltja, tehát $y(x)=90x^8+x^{10}+e^x$.