Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amelynek léteznek az origóban a parciális deriváltjai, de ott nem differenciálható
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja az $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^4 - 15x^2 + 49}{x^2 + x - 6}\, \mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a hatványsor konvergenciatartományát.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \binom{2n}{n} x^n$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg az $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenetet $y(1) = e$ kezdeti feltétel mellett.
7. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az $y'' - y = 5040x^6 - x^{10}$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett ($5040 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$).