Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható) f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.

   Megoldás. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható (a,b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Mit értünk egy hatványsor konvergenciasugara alatt? Adjon példát olyan hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara 1 és az $x = 2$ és $x = 4$ pontokban is konvergens.

   Megoldás. Egy x_0 középpontú hatványsor konvergenciasugara R, ha $|x - x_0| < R$ esetén konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén divergens. A feltétel szerinti hatványsornak csak $x_0 = 3$ lehet a középpontja, és ilyen létezik is, pl. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-3)^n$

5. Adja meg a vektoriális szorzat geometriai definícióját és koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját.

   Megoldás. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$, ahol γ a két vektor által bezárt szög, merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra, és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Ha $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y, a_zb_x - a_xb_z, a_xb_y - a_yb_x)$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?

   Megoldás. $\mathbf{v}$ potenciálos, ha létezik olyan f függvény, amivel $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ teljesül.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sqrt{n^2 + 18n + 3} - n$$
$$b_n = n \tan \frac{1}{n}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+18n+3} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+18n+3-n^2}{\sqrt{n^2+18n+3}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{18+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+18\frac{1}{n}+\frac{3}{n}}+1} = 9$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n \tan\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} = 1,$$

az utolsó lépésben felhasználva a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$ nevezetes határértéket.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Parciális integrálással

$$\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \underbrace{2xe^{x^2}}_{g'}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + C,$$

tehát

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

3. Határozza meg az f 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát, ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Megoldás. A megadott függvény páros, tehát a Fourier-sora tisztán koszinusz sor. Az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

és

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{2}{\pi}x\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{(2k)^2} & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2} & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Tehát a Fourier-sor

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^k}{(2k+2)^2}\cos(2k+2)x\right)$$

4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Ha A diagonalizálható, azaz felírható $A = SDS^{-1}$ alakban, ahol D diagonális, akkor $A^{100} = SD^{100}S^{-1}$ módon a legegyszerűbb a számolás, hiszen egy diagonális mátrix elemenként hatványozható. Ebben a felírásban D elemei a sajátértékek, S oszlopai pedig a sajátvektorok.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda),$$

tehát a sajátértékek ± 1 és 2.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A fentiek alapján

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

választható. S inverzét kell még meghatározni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3 \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1+2s_3 \\ s_2+s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

tehát

$$A^{100} = SD^{100}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+2^{101} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 1-2^{100} & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2 - y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.

   Megoldás. A megadott görbe egy hengerpalást és egy sík metszete, az $x = 0$ síkra vett vetület egy paraméterezése $(0, \cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$, a második egyenletből x kifejezhető, így a térgörbe $\mathbf{r}(t) = (3 - \cos t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ paraméterezését kapjuk. A derivált abszolútértéke

   $$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\sin t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t},$$

   a skalármező értéke a görbén

   $$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2 - \cos^2 t}.$$

   A skalármező görbementi integrálja

   $$\int f \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - \cos^2 t)(1 + \sin^2 t)} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t) \,\mathrm{d}t = 3\pi.$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3+y^2z)\mathbf{i} + (y^3+x^2z)\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú 2 sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Használhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt,

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial z} = 3x^2+3y^2.$$

   A gömb szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, ahol $(r,\vartheta,\varphi)\in[0,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, $\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)) = r^2\sin^2\vartheta$. Az integrál tehát

$$\begin{aligned}\iint \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V &= \int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 3r^2\sin^2\vartheta r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\ &= 6\pi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{3\cdot 64\pi}{5}\int_0^\pi \left(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{3\cdot\pi}{5}\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^\pi = \frac{256\pi}{5}.\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $y''+5y'+6y=\cos x$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet másodrendű inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x)=Ae^{-2x}+Be^{-3x}$. Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x)=C\cos x+D\sin x$ alakban kereshetjük. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x) &= -C\sin x + D\cos x\\ y''(x) &= -C\cos x - D\sin x,\end{aligned}$$

   a behelyettesítéssel kapott egyenlet

$$(5C+5D)\cos x + (-5C+5D)\sin x = \cos x,$$

   amiből $5C+5D=1$, $-5C+5D=0$, tehát $C=D=\frac{1}{10}$. Ennek alapján az inhomogén egyenlet általános megoldása és annak deriváltja

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + Ae^{-2x} + Be^{-3x}\\ y'(x) &= -\frac{1}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x - 2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}.\end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel

$$\begin{aligned}0 = y(0) &= \frac{1}{10} + A + B\\ 0 = y'(0) &= \frac{1}{10} - 2A - 3B,\end{aligned}$$

   amiből $A=-\frac{2}{5}$ és $B=\frac{3}{10}$ adódik. A keresett megoldás

$$y(x) = \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x - \frac{2}{5}e^{-2x} + \frac{3}{10}e^{-3x}.$$