Matematika szigorlat G (A3) – 2019. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható) f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Mit értünk egy hatványsor konvergenciasugara alatt? Adjon példát olyan hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara 1 és az $x = 2$ és $x = 4$ pontokban is konvergens.
5. Adja meg a vektoriális szorzat geometriai definícióját és koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét
$$a_n = \sqrt{n^2 + 18n + 3} - n$$
$$b_n = n \tan \frac{1}{n}$$
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg az f 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát, ha
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$
4. Számítsa ki az A^{100} mátrixot, ha
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2 - y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + y^2 z)\mathbf{i} + (y^3 + x^2 z)\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú 2 sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Oldja meg az $y'' + 5y' + 6y = \cos x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.