Matematika szigorlat G (A3) – 2019. február 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Definiálja, hogy mit jelent, hogy az f függvénynek $-\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $\forall\epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x < K : |f(x) - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki Rolle tételét.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = 0$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$

5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

    Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \le L|x - x'|$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sqrt{n-1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$b_n = \frac{99^n + n^{99} - n^n}{n! + 99^{99} - \sqrt[99]{n}}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{99^n + n^{99} - n^n}{n! + 99^{99} - \sqrt[99]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{\frac{99^n}{n^n} + \frac{n^{99}}{n^n} - 1}{1 + \frac{99^{99}}{n!} - \frac{\sqrt[99]{n}}{n!}} = -\infty.$$

2. Végezze el az $f(x) = xe^{1/x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushely. A határértékek ($t = 1/x$ helyettesítéssel)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{1/x} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{t} = 0,$$

a deriváltak

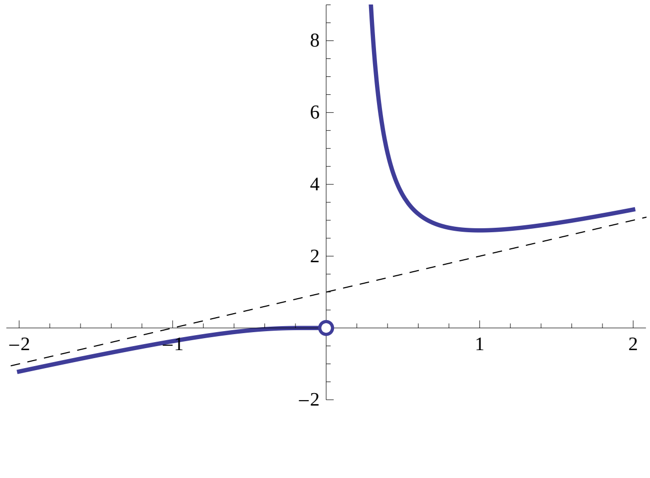
$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x} = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$f''(x) = \left(e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3},$$

f' zérushelye 1, f'' sehol nem 0. Az előjelek:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	$\frown$	X	$\smile$	min	$\smile$
f'	+	X	-	0	+
f''	-	X	+	+	+

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

tehát van ferde aszimptota, az egyenlete $y = x + 1$ (mindkét irányban).



$R_f = (-\infty, 0) \cup [e, \infty).$

3. Számítsa ki az alábbi sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján: (a_k jelöli x^k együtthatóját)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2n+1}} = 1,$$

tehát a konvergenciasugár $R = 1$. A két végponton a sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány tehát $[-1, 1]$.
Az összeg kiszámítása mértani sor összegzésére vezethető vissza:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2},$$

ebből integrálással adódik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\arctan x}{x}.$$

4. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Megoldás. Fubini tétele szerint a kétszeres integrál megegyezik a kétváltozós függvény integráljával az alábbi tartományon:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le \sqrt{\pi}, y \le x \le \sqrt{\pi}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le \sqrt{\pi}, 0 \le y \le x\right\}.$$

Az utóbbi megadást felhasználva cseréljük fel az integrálokat:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \sin(x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[y\sin(x^2)\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormező ($x^2 + y^2 \neq 0$)? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás.

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^2},$$

tehát mindenhol létezik lokális potenciálfüggvény. A komponensfüggvények integrálásából azt kapjuk, hogy ha f potenciál, akkor

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int u_x(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi = \log(x^2+y^2) + c_1(y) \\ f(x, y) &= \int u_y(x, \eta)\,\mathrm{d}\eta = \log(x^2+y^2) + c_2(x). \end{aligned}$$

A két alak összevetéséből $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + C$, ennek az origón kívül mindenhol $\mathbf{u}$ a gradiense.

6. Határozza meg a $2xy' - y = 3x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását a $(0, \infty)$ intervallumon.

Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x},$$

ebből integrálással $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}\ln x + C$, azaz $y(x) = C\sqrt{x}$. Az inhomogén egyenlet megoldásához használhatjuk az állandók variálásának módszerét. A megoldást $y(x) = c(x)\sqrt{x}$ alakban keressük, $y'(x) = c'(x)\sqrt{x} + c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ezeket behelyettesítve az egyenlet

$$2xc'(x)\sqrt{x} = 3x^2,$$

amiből $c'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, integrálással $c(x) = x^{3/2} + C$. Az általános megoldás tehát $y(x) = x^2 + C\sqrt{x}$.

7. Határozza meg a következő függvény Laplace-transzformáltját.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{ha } 0 \le x \le 2\pi \\ 1 & \text{ha } 2\pi < x \end{cases}$$

Megoldás. A függvény korlátos, tehát a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkon létezik a Laplace-transzformált. A kiszámításhoz szükség van $\cos(x)e^{-zx}$ primitív függvényére:

$$\begin{aligned}\int \cos(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x &= \sin(x)e^{-zx} - \int \sin(x)(-z)e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)e^{-zx} + z\left(-\cos(x)e^{-zx} - \int(-\cos x)(-z)e^{-zx}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sin(x)e^{-zx} - z\cos(x)e^{-zx} - z^2\int \cos(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel

$$\int \cos(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+z^2}e^{-zx}\sin x - \frac{z}{1+z^2}e^{-zx}\cos x + C$$

adódik.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(z) &= \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^\infty e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{1+z^2}e^{-zx}\sin x - \frac{z}{1+z^2}e^{-zx}\cos x\right]_{x=0}^{x=2\pi} + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-zx}}{-z}\right]_{x=2\pi}^{x=b} \\ &= \frac{z}{1+z^2}\left(1 - e^{-2\pi z}\right) + \frac{e^{-2\pi z}}{z}\end{aligned}$$