Matematika szigorlat G (A3) – 2019. február 14.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Definiálja, hogy mit jelent, hogy az f függvénynek $-\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$.
3. Mondja ki Rolle tételét.
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sqrt{n-1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$b_n = \frac{99^n + n^{99} - n^n}{n! + 99^{99} - \sqrt[99]{n}}$$

2. Végezze el az $f(x) = xe^{1/x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Számítsa ki az alábbi sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

4. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ vektormező $(x^2 + y^2 \neq 0)$? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.
6. Határozza meg a $2xy' - y = 3x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását a $(0, \infty)$ intervallumon.
7. Határozza meg a következő függvény Laplace-transzformáltját.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{ha } 0 \le x \le 2\pi \\ 1 & \text{ha } 2\pi < x \end{cases}$$