Matematika szigorlat G (A3) – 2019. május 30.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1+\sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

3. Írja fel az f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-ed fokú Taylor-polinomját.

   Megoldás. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

6. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

7. Ismertesse egy folytonos vektormező felületi integráljának kiszámításának módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott felület mentén.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ és $f: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sqrt{n^2+7n+1} - \sqrt{n^2-n+9}$$
$$b_n = n^2\left(\frac{n^2+4n}{2n^2-n+3}\right)^n$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+7n+1} - \sqrt{n^2-n+9}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+7n+1)-(n^2-n+9)}{\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2-n+9}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{8n-8}{\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2-n+9}}\\ &= \lim_{n\to\infty} 8\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+7\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{9}{n^2}}} = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n^2+4n}{2n^2-n+3}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2 2^{-n}\left(1+\frac{9n+3}{2n^2-n+3}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2 2^{-n}\left[\left(1+\frac{9n+3}{2n^2-n+3}\right)^{\frac{2n^2-n+3}{9n+3}}\right]^{n\frac{9n+3}{2n^2-n+3}} = 0,\end{aligned}$$

mivel $n^2 2^{-n} \to 0$ és

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{9n+3}{2n^2-n+3}\right)^{\frac{2n^2-n+3}{9n+3}}\right]^{n\frac{9n+3}{2n^2-n+3}} = e^{9/2}.$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{4x^3-10x^2+25}{x^4-4x^3+5x^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a nevező $x^2(x^2-4x+5)$, a második tényezőnek nincs valós gyöke. A parciális törtekre bontáshoz

$$\frac{4x^3-10x^2+25}{x^4-4x^3+5x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C+Dx}{x^2-4x+5}$$

mindkét oldalát megszorozzuk a közös nevezővel:

$$\begin{aligned}4x^3-10x^2+25 &= Ax(x^2-4x+5)+B(x^2-4x+5)+(Cx+D)x^2\\ &= (A+D)x^3+(-4A+B+C)x^2+(5A-4B)x+5B.\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}4 &= A+D\\ -10 &= -4A+B+C\\ 0 &= 5A-4B\\ 25 &= 5B.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $B=5$, $A=4$, $D=0$, $C=1$, tehát

$$\frac{4x^3-10x^2+25}{x^4-4x^3+5x^2} = \frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^2-4x+5} = \frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{(x-2)^2+1}.$$

Az integrál ennek alapján

$$\int \frac{4x^3-10x^2+25}{x^4-4x^3+5x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{(x-2)^2+1}\right)\mathrm{d}x = 4\ln|x| - \frac{5}{x}+\arctan(x-2)+C.$$

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. Először a konvergenciasugarat határozzuk meg a Cauchy–Hadamard-tétel segítségével.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n^2+1}}} = 2.$$

Megvizsgáljuk a konvergenciát a végpontokban. Ha $x = -\frac{1}{2}$, akkor a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(-\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. Az $x = \frac{1}{2}$ pontban viszont

$$\frac{2^n(-\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n},$$

tehát az összehasonlító (vagy minoráns-) kritérium alapján az eredeti sor divergens, mivel a harmonikus sorral tagonként alulról becsülhető. Eszerint a konvergenciaintervallum $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4. Oldja meg az $XA = B$ egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Ha A invertálható, akkor X kifejezhető az egyenletből $X = BA^{-1}$ módon. Meghatározzuk az inverz mátrixot (ha létezik):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2+2s_1 \\ s_3+s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1+s_3 \\ s_2+s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A jobb oldalon álló 3×3 méretű blokk A^{-1}. Ezt felhasználva

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 5 \\ -3 & -5 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = \dfrac{1 + xy - xz}{\sqrt{1+x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1+x^2}\mathbf{j} - \sqrt{1+x^2}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező az egész téren differenciálható, tehát pontosan akkor potenciálos, ha a rotációja azonosan 0. Számoljuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial\left(\frac{1+xy-xz}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial\sqrt{1+x^2}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1+xy-xz}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\partial z} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial(-\sqrt{1+x^2})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\sqrt{1+x^2}}{\partial z} = 0 = \frac{\partial(-\sqrt{1+x^2})}{\partial y},$$

tehát a vektormező potenciálos. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z \left(-\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\zeta \\
&= \operatorname{arsinh} x + (y-z)\sqrt{1+x^2}.
\end{aligned}$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3+2xy^2)\mathbf{i} + (x^2z+xz^2)\mathbf{j} + (z^3+zy^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az origó középpontú 2 egység sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Az integrált közvetlenül is ki lehet számítani, de a számolás egyszerűbb, ha a Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazásával térfogati integrálra vezetjük vissza. Ehhez ki kell számolni a divergenciát:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) &= \frac{\partial(x^3+2xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2z+xz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3+zy^2)}{\partial z} \\
&= 3x^2+2y^2+0+3z^2+y^2 = 3(x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}$$

   A keresett integrál megegyezik a $\operatorname{div}\mathbf{u}$ skalármező origó középpontú 2 egység sugarú gömbön vett térfogati integráljával. Ennek számolásához érdemes gömbi koordinátákat használni: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, $\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)) = 3r^2$, az integrálási tartományt a $0\le r\le 2$, $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Az integrál tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 3\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r \\
&= 6\pi\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = 12\pi\cdot\frac{32}{5} = \frac{384}{5}\pi.
\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y''+5y'+6y = xe^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+5\lambda+6 = (\lambda+2)(\lambda+3)$, tehát a gyökök -2 és -3. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x}+Be^{-3x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = x(C_0+C_1x)e^{-2x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (C_0-2C_0x+2C_1x-2C_1x^2)e^{-2x} \\
y''(x) &= (-4C_0+2C_1+4C_0x-8C_1x+4C_1x^2)e^{-2x},
\end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$(C_0+2C_1+2C_1x)e^{-2x} = xe^{-2x}$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C_0+2C_1=0$ és $2C_1=1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0=-1$, $C_1=\frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -xe^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+Ae^{-2x}+Be^{-3x}$.