

# Matematika szigorlat G (A3) – 2019. május 30.

Elmélet ( $10 \times 3 = 30$  pont)

1. Definiálja egy  $z$  komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az  $1 + \sqrt{3}i$  számot.
2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?
3. Írja fel az  $f$  függvény  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  pont körüli  $n$ -ed fokú Taylor-polinomját.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
6. Írja fel a sík origó körüli  $\alpha$  szögű forgatásának a mátrixát a szokásos  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisban.
7. Ismertesse egy folytonos vektormező felületi integráljának kiszámításának módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott felület mentén.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Definiálja az  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ( $7 \times 10 = 70$  pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sqrt{n^2 + 7n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 9}$$

$$b_n = n^2 \left( \frac{n^2 + 4n}{2n^2 - n + 3} \right)^n$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{4x^3 - 10x^2 + 25}{x^4 - 4x^3 + 5x^2} dx$$

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

hatványsor konvergenciatartományát.

4. Oldja meg az  $XA = B$  egyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & -2 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

5. Potenciálos-e az  $\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1 + xy - xz}{\sqrt{1 + x^2}} \mathbf{i} + \sqrt{1 + x^2} \mathbf{j} - \sqrt{1 + x^2} \mathbf{k}$  vektormező?

Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

6. Számítsa ki az  $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + 2xy^2) \mathbf{i} + (x^2z + xz^2) \mathbf{j} + (z^3 + zy^2) \mathbf{k}$  vektormező integrálját az origó középpontú 2 egység sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az  $y'' + 5y' + 6y = xe^{-2x}$  differenciálegyenlet általános megoldását.