Matematika szigorlat G (A3) – 2019. június 6.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a jobboldali határértéke $-\infty$.

   Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) < K$.

2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(7+x^2)^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. A nevező szigorúan pozitív, $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem periodikus. $f(x) = 0$ ha $1-x^2 = (1-x)(1+x) = 0$, tehát a zérushelyek ± 1. A határértékek

$$\lim_{x \pm \infty} f(x) = \lim_{x \pm \infty} \frac{1}{x^4} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\left(\frac{7}{x^2} + 1\right)^2} = 0,$$

   Tehát $y = 0$ vízszintes aszimptota. A deriváltak

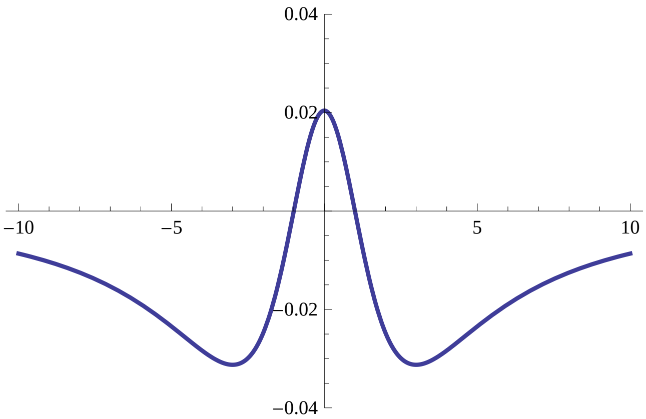
$$f'(x) = \frac{-2x(7+x^2)^2 - (1-x^2)2(7+x^2)2x}{(7+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-9)}{(7+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(2(x^2-9)+4x^2)(7+x^2)^3 - 2x(x^2-9)3(7+x^2)^2 2x}{(7+x^2)^6} = \frac{6(x^2-21)(1-x^2)}{(7+x^2)^4},$$

   f' zérushelyei 0 és ± 3, f'' zérushelyei ± 1 és $\pm\sqrt{21}$. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty, -\sqrt{21})$	$-\sqrt{21}$	$(-\sqrt{21}, -3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0
f	◝	infl	◟	min	◞	infl	◜	max
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\sqrt{21})$	$\sqrt{21}$	$(\sqrt{21}, \infty)$
f	max	◝	infl	◟	min	◞	infl	◜
f'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$



$R_f = [-\frac{1}{32}, \frac{1}{49}]$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

   Megoldás. $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel, majd kétszer parciálisan integrálva

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 2t^2 e^t \, \mathrm{d}t \\
&= \left[2t^2 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 4te^t \, \mathrm{d}t \\
&= \left[2t^2 e^t\right]_0^1 - \left[4te^t\right]_0^1 + \int_0^1 4e^t \, \mathrm{d}t \\
&= \left[(2t^2 - 4t + 4)e^t\right]_0^1 = 2e - 4.
\end{aligned}$$

3. Számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

   sorösszeget és a konvergenciatartományt.

Megoldás. A mértani sor ismert összegéből induljunk ki:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ha $x \in (-1, 1)$. Deriváljuk mindkét oldalt, szorozzuk meg x-szel, deriváljuk újra és szorozzuk meg ismét x-szel:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}\\
\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n} &= \frac{x}{(1-x)^2}\\
\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n-1} &= \frac{1+x}{(1-x)^3}\\
\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

A konvergenciasugár egyik lépéstől sem változik, a végpontokban (azaz ha $x = \pm 1$), a sor tagjai nem tartanak nullához, tehát a konvegenciatartomány $(-1, 1)$.

4. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -18 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 3 & -18 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & -3-\lambda \\ 3 & -18 & -13-\lambda \end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) - (2\lambda - 4) = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)
\end{aligned}$$

Ennek gyökei $\lambda = 2$ és $\lambda = \pm i$. Mivel minden sajátérték (algebrai) multiplicitása 1, létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & -18 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

így $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei a sajátvektorok.
$\lambda = i$:

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 1 & -4-i & 1 \\ 3 & -18 & 5-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 1-i & 1 & -1 \\ 3 & -18 & 5-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 0 & 6-3i & -2+i \\ 0 & -6+3i & 2-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4-i & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

így $\begin{bmatrix} 1+i & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei a sajátvektorok.
Mivel a mátrix elemei valósak, a $\lambda = -i$-hez tartozó sajátvektorok ezek konjugáltjai lesznek, azaz $\begin{bmatrix} 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2 - y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.

Megoldás. A görbe $x = 0$ síkra eső vetülete az origó középpontú egységkör, amit $t \mapsto \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ módon paraméterezetünk. Az y koordináta viszont a második egyenlet alapján meghatározza az x koordinátát, tehát a megadott görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (3 - \cos t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ ($t \in [0, 2\pi]$). A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\sin t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}.$$

A skalármező a görbén kiértékelve

$$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2-\cos^2 t},$$

tehát a meghatározandó integrál

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-\cos^2 t}\sqrt{2\sin^2 t+\cos^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (2-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 4\pi - \pi = 3\pi.\end{aligned}$$

6. Oldja meg az $y' = \frac{y}{x}\left(2+\frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletet $y(2)=2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű explicit és a jobb oldal $\frac{y}{x}$ függvénye, emiatt $u=\frac{y}{x}$ helyettesítéssel visszavezethető szétválasztható differenciálegyenletre:

$$u' = \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{x}u(2+u) - \frac{u}{x} = \frac{1}{x}u(u+1).$$

   Osszuk el mindkét oldalt $u(u+1)$-gyel, majd integráljuk x szerint (parciális törtekre bontva):

$$\begin{aligned}\ln|x| + \tilde{C} = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u'(x)}{u(x)(u(x)+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{u'(x)}{u(x)+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|u(x)| - \ln|u(x)+1| = \ln\left|\frac{u(x)}{u(x)+1}\right|,\end{aligned}$$

   amiből

$$u(x) = \frac{Cx}{1-Cx},$$

   azaz

$$y(x) = \frac{Cx^2}{1-Cx}.$$

   A kezdeti feltétel $2 = y(2) = \frac{4C}{1-2C}$, tehát $C=\frac{1}{4}$.

7. Határozza meg az $y''+6y'+5y = xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+6\lambda+5=(\lambda+1)(\lambda+5)$, tehát a gyökök -1 és -5. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}+Be^{-5x}$ $(A,B\in\mathbb{R})$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x)=(C_0+C_1x)e^x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x) &= (C_0+C_1+C_1x)e^x \\ y''(x) &= (C_0+2C_1+C_1x)e^x,\end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$(12C_0+8C_1+12C_1x)e^x = xe^x$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $12C_0+8C_1=0$ és $12C_1=1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0=-\frac{1}{18}$, $C_1=\frac{1}{12}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x)=-\frac{1}{18}e^x+\frac{1}{12}xe^x+Ae^{-x}+Be^{-5x}$.