

Matematika szigorlat G (A3) – 2019. június 6.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a jobboldali határértéke $-\infty$.
2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{1-x^2}{(7+x^2)^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$$

3. Számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

sorösszeget és a konvergenciatartományt.

4. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -18 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis (\mathbb{C} felett)?

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2-y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.
6. Oldja meg az $y' = \frac{y}{x} \left(2 + \frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletet $y(2) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 6y' + 5y = xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.