Matematika szigorlat G (A3) – 2019. június 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.

   Megoldás. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható (a,b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$$
$$b_n = \sqrt[3/n^2]{1 - \frac{5}{n^2-3}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2} = 0,
\end{aligned}$$

mivel a sin folytonos, az argumentumának 0 a határértéke, a cos pedig korlátos.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3/n^2]{1 - \frac{5}{n^2-3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2/3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^{\frac{n^2}{3(n^2-3)}} \\
&= (e^{-5})^{1/3} = e^{-5/3}.
\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye. A határérték

$$\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt[3]{x}} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

A deriváltak

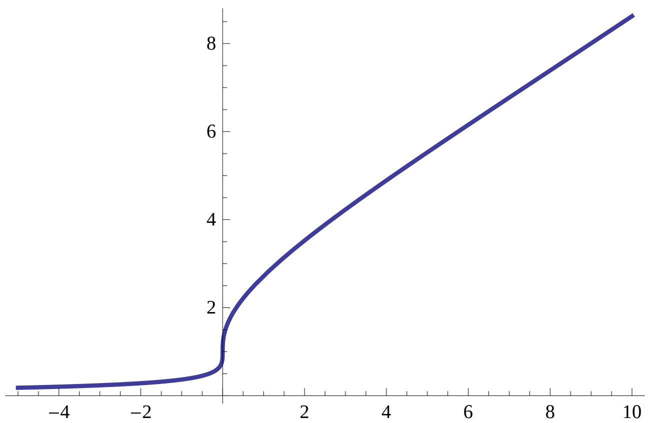
$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{3}x^{-2/3}$$
$$f''(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{9}x^{-4/3} - e^{\sqrt[3]{x}}\frac{2}{9}x^{-5/3} = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x}-2)}{9x^{5/3}},$$

f' sehol sem 0, f'' zérushelye $x = 8$. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,8)$	8	$(8,\infty)$
f	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$
f'	$+$	X	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	X	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^3} = \infty,$$

tehát nincs ferde aszimptota. $R_f = (0,\infty)$.



3. Adja meg az

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

függvény $x_0 = 3$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciatartományát.

Megoldás.

$$f(x) = \frac{1}{x-5} = \frac{1}{(x-3)-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x-3}{2}},$$

tehát a mértani sor összegképlete alapján

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}},$$

ha $|\frac{x-3}{2}| < 1$. A konvergenciaintervallum eszerint $(1, 5)$.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 3y + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2xy + 4x = 2x(2 + y) \\ f'_y(x, y) &= x^2 - 3 + 2y, \end{aligned}$$

az előbbi akkor 0, ha $x = 0$ vagy $y = -2$. Ezeket az $f'_y(x, y) = 0$ egyenletbe helyettesítve $y = \frac{3}{2}$ illetve $x = \pm\sqrt{7}$ adódik, tehát a lehetséges pontok $(0, \frac{3}{2})$, $(\sqrt{7}, -2)$ és $(-\sqrt{7}, -2)$.
A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y + 4 & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix},$$

$\det H(x, y) = 4y + 8 - 4x^2$, ennek értéke a $(0, \frac{3}{2})$ pontban 14, tehát itt lokális szélsőérték van, a főátló elemei pozitívak, tehát lokális minimum.
A $(\pm\sqrt{7}, -2)$ pontokban $\det H(\pm\sqrt{7}, -2) = -28$, tehát ezek nyeregpontok.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (-2y - x)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbfelület $z \geq 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{2}\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos\vartheta\mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartományt a $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A normálvektor

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial\varphi} &= (\sqrt{2}\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - \sqrt{2}\sin\vartheta\mathbf{k}) \times (-\sqrt{2}\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= 2\sin^2\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + 2\sin^2\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\mathbf{k}, \end{aligned}$$

ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = (-2\sqrt{2}\sin\vartheta\sin\varphi - \sqrt{2}\sin\vartheta\cos\varphi)\mathbf{i} + (2\sqrt{2}\sin\vartheta\cos\varphi - 3\sqrt{2}\sin\vartheta\sin\varphi)\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos\vartheta\mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial\varphi} \right) \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta\cos^2\varphi - 3\sin^3\vartheta\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/4} (2\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/4} (6\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 4\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left[2\cos^3\vartheta + 4\cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/4} = (6 - 4\sqrt{2})\pi. \end{aligned}$$

6. Határozza meg a $xy' - (1+x)y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1,$$

   integráljuk mindkét oldalt:

$$\ln|y(x)| = \ln|x| + x + C,$$

   amiből $y(x) = Cxe^x$. Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)xe^{\frac{x^2}{2}}$ alakban keressük, az egyenletbe helyettesítve

$$xc'(x)xe^x = x^2,$$

   azaz $c'(x) = e^{-x}$ adódik. Ebből $c(x) = -e^{-x} + C$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -x + Cxe^x.$$

7. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ e^{1-x} & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

   függvény Laplace-transzformáltját.

   Megoldás.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{-zx}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-zx}e^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{-zx}\,\mathrm{d}x + e\int_1^\infty e^{-(z+1)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{e^{-zx}}{z}\right]_{z=0}^{z=1} + e\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-(z+1)x}}{z+1}\right]_{x=1}^{x=b} \\
&= \frac{1-e^{-z}}{z} + \frac{e^{-z}}{z+1}
\end{aligned}$$

   ha $\operatorname{Re} z > 0$.