Matematika szigorlat G (A3) – 2019. június 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.
2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$$

$$b_n = \sqrt[3/n^2]{1 - \frac{5}{n^2 - 3}}$$

2. Végezze el az $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Adja meg az

$$f(x) = \frac{1}{x - 5}$$

függvény $x_0 = 3$ középpontú Taylor-sorát, és határozza meg annak konvergenciatartományát.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 3y + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (-2y - x)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbfelület $z \geq 1$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
6. Határozza meg a $xy' - (1 + x)y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.