Matematika szigorlat G (A3) – 2019. szeptember 12.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy valós számsorozat infimumának fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat infimuma az $I \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq I$ és $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : a_n < I + \epsilon$. Ha nincs ilyen valós szám, akkor azt mondjuk, hogy az infimum $-\infty$.

2. Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.

   Megoldás. Ha az f függvény invertálható, differenciálható az $f^{-1}(y_0)$ pontban és deriváltja ott nem 0, akkor f^{-1} differenciálható az y_0 pontban, és a deriváltja ott $\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0, 1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall \epsilon \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall x \in H \forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Például $f_n(x) = x^n$.

5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. A $\mathbf{v} \in V$ vektor az L lineáris transzformáció $\lambda \in K$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$.

6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.

   Megoldás.

$$
\begin{aligned}
f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)+& \\
+ \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 &+ f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f''_{yy}(y - y_0)^2
\end{aligned}
$$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon vektorpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, ahol $a_0, \ldots, a_n, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \frac{n^7 - 4^n + \ln^{100} n}{2^{2n+3} - n \arctan n}$$
$$b_n = \sqrt{4n+7}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+5}\right)$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7 - 4^n + \ln^{100} n}{2^{2n+3} - n \arctan n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^7}{4^n} - 1 + \frac{\ln^{100} n}{4^n}}{8 - \frac{n \arctan n}{4^n}} = -\frac{1}{8},$$

mivel $\ln n \ll n \ll \alpha^n$ minden $\alpha > 1$ esetén és $|\arctan n| < \frac{\pi}{2}$ minden n esetén.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4n+7}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4n+7}\frac{(n+2)-(n+5)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+5}}$$
$$= -3 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{7}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{5}{n}}} = -3.$$

2. Végezze el az $f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = (0,1)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye. A határérték

$$\lim_{x\to 0} -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) = \lim_{x\to 0} -\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to 1} -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) = \lim_{x\to 1} -\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} = -\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = 0.$$

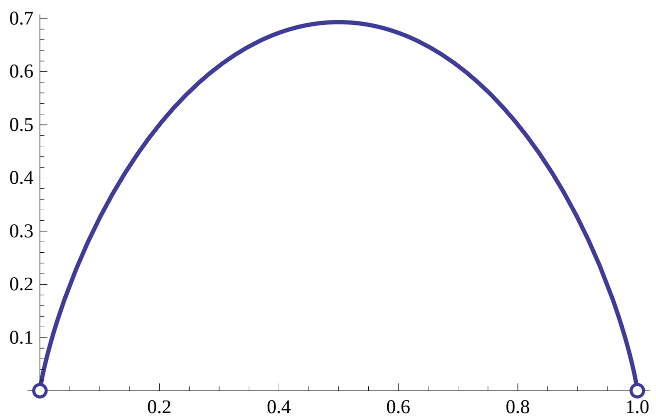
A deriváltak

$$f'(x) = -\ln(x) + \ln(1-x)$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x},$$

f' zérushelye $\frac{1}{2}$, f'' sehol sem 0. Az előjelek a következő táblázat szerint alakulnak:

	$(0,1/2)$	$1/2$	$(1/2,1)$
f	$\frown$	max	$\frown$
f'	$+$	0	$-$
f''	$-$	$-$	$-$

$R_f = (0, \ln 2]$.



3. Számítsa ki a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ jelöléssel

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1,$$

tehát a konvergenciasugár $R = 1$. A végpontokon a sor abszolút konvergens, mivel $n - 1 \geq \frac{n}{2}$ és így $\frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{2}{n^2}$, ha $n \geq 2$. A konvergenciatartomány tehát $[-1, 1]$.
Az összeg kiszámítása tagonkénti deriválással mértani sor összegzésére vezethető vissza:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x},$$

ebből integrálással adódik, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \int_0^x \frac{1}{1-\xi}\,\mathrm{d}\xi = -\ln(1-x)$$

és

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \int_0^x -\ln(1-\xi)\,\mathrm{d}\xi = [\xi + (1-\xi)\ln(1-\xi)]_{\xi=0}^{x} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

4. Az λ valós paraméter mely értékeinél létezik nemtriviális megoldása az

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_4 &= 0 \\ (1+\lambda)x_2 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Ezen értékek mellett határozza meg a megoldásokat.

Megoldás. Az egyenletrendszer homogén, 4 ismeretlent tartalmaz és 4 egyenletből áll, tehát pontosan akkor létezik nemtriviális megoldás, ha az együtthatómátrix determinánsa 0 (hiszen ekkor kisebb a rangja a változók számánál). A második sor szerint kifejtve

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1+\lambda)(3 - 8 - \lambda) = -(1+\lambda)(5+\lambda),$$

ez akkor 0, ha $\lambda = -1$ vagy $\lambda = -5$.
Ha $\lambda = -1$, akkor a megoldások

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

alapján $x_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$.
Ha $\lambda = -5$, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

alapján $x_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = 5x_4, x_2 = 0, x_3 = -2x_4$.

5. Hol van az $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k}$ felület $u^2 + v^2 \leq 1$, $v \geq 0$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a tömegközéppontja?

Megoldás. A tömegközéppont koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a koordinátafüggvények integráljait elosztjuk a felszínnel. A normálvektor abszolútértéke

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \right| = |(\mathbf{i} + 2u\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2v\mathbf{k})| = |-2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}.$$

A paramétertartomány félkörlap, az integráláshoz használjunk polárkoordinátákat: $u(r,\phi) = r\cos\phi$, $v(r,\phi) = r\sin\phi$ ($r \in [0,1]$, $\phi \in [0,\pi]$), a Jacobi-determináns r, $\sqrt{1+4u(r,\phi)^2+4v(r,\phi)^2} = \sqrt{1+4r^2}$. A szükséges integrálok

$$\int_0^1 \int_0^\pi r\cos\phi\sqrt{1+4r^2}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^\pi r\sin\phi\sqrt{1+4r^2}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$\int_0^1 \int_0^\pi r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\sqrt{1+4r^2}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^\pi r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} = (5\sqrt{5}-1)\frac{\pi}{12}$$

Azt már látjuk, hogy a tömegközéppont x és z koordinátája 0. A második integrál meghatározásához alkalmazzunk $r = \frac{1}{2}\sinh t$, $\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}\int r^2\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{8}\int \sinh^2 t\sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int \sinh^2(2t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{64}\int(-1+\cosh 4t)\,\mathrm{d}t = -\frac{t}{64} + \frac{1}{256}\sinh 4t = -\frac{\operatorname{arsinh} 2r}{64} + \frac{1}{256}\sinh(4\operatorname{arsinh} 2r),\end{aligned}$$

tehát

$$\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{\operatorname{arsinh} 2}{64} + \frac{1}{256}\sinh(4\operatorname{arsinh} 2) = -\frac{\operatorname{arsinh} 2}{64} + \frac{9\sqrt{5}}{32}$$

A tömegközéppont y koordinátája tehát

$$\frac{54\sqrt{5} - 3\operatorname{arsinh} 2}{8(5\sqrt{5}-1)\pi}$$

6. Oldja meg az $y' = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. A differenciálegyenlet szétválasztható: $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+x^2}$, az integrálok

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arsinh} y$$

és $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int\cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \int\frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sinh 2t}{4} = \frac{\operatorname{arsinh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C.\end{aligned}$$

Az általános megoldás így

$$y(x) = \sinh\left(\frac{\operatorname{arsinh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C\right),$$

a kezdeti feltétel alapján $C = 0$.

7. Határozza meg az $y'' + 10y' + 25y = xe^{-3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet állandó együtthatós inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+10\lambda+25 = (\lambda+5)^2$, tehát -5 kétszeres gyök (belső rezonancia), a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$.
Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, az egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = (C_0+C_1x)e^{-3x}$ alakban. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned}y'(x) &= (-3C_0 + C_1 - 3C_1x)e^{-3x}\\ y''(x) &= (9C_0 - 6C_1 + 9C_1x)e^{-3x},\end{aligned}$$

az egyenletbe helyettesítve

$$(4C_0 + 4C_1 + 4C_1x)e^{-3x} = xe^{-3x}$$

adódik. Ez akkor teljesül minden x értékre, ha $4C_1 = 1$ és $4C_0 + 4C_1 = 0$, tehát $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_0 = -\frac{1}{4}$. Az általános megoldás $y(x) = \frac{x-1}{4}e^{-3x} + Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$.