

## Matematika szigorlat G (A3) – 2019. szeptember 12.

Elmélet ( $10 \times 3 = 30$  pont)

1. Definiálja egy valós számsorozat infimumának fogalmát.
2. Mondja ki az inverz függvény  $y_0$  pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.
3. Definiálja egy  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény 0 és  $\infty$  közötti improprius integrálját.
4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely  $[0, 1]$  minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.
5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Írja fel az  $f(x, y)$  kétváltozós függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Írja fel az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ( $7 \times 10 = 70$  pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét

$$a_n = \frac{n^7 - 4^n + \ln^{100} n}{2^{2n+3} - n \arctan n}$$
$$b_n = \sqrt{4n+7} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+5})$$

2. Végezze el az  $f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$  függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Számítsa ki a  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$  sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.
4. Az  $\lambda$  valós paraméter mely értékeinél létezik nemtriviális megoldása az

$$\begin{aligned}x_1 + \lambda x_4 &= 0 \\(1 + \lambda)x_2 &= 0 \\x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Ezen értékek mellett határozza meg a megoldásokat.

5. Hol van az  $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k}$  felület  $u^2 + v^2 \leq 1$ ,  $v \geq 0$  paramétertartománynak megfelelő darabjának a tömegközéppontja?
6. Oldja meg az  $y' = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$  differenciálegyenletet  $y(0) = 0$  kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az  $y'' + 10y' + 25y = xe^{-3x}$  differenciálegyenlet általános megoldását.